Мр Саша Дубљанин[1]
Одељење за педагогију
Филозофски факултет
Београд

UDK-37.015.3
Оригинални научни рад
HB.LIX 1.2010.
Примљен: 15. VII 2009.

КАКО УЧЕНИЦИ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ АНАЛИЗИРАЈУ И РЕШАВАЈУ МАТЕМАТИЧКЕ ЗАДАТКЕ

Апстракт *У раду су представљени резултати емпиријског истраживања чији је циљ био да се утврди како ученици основне школе анализирају и решавају математичке задатке. Тестом истраживања обухваћено је 208 ученика. Резултати истраживања су показали да се ученици приликом анализе ослањају на непосредно уочене и спољашње карактеристике задатака. Такође, таква оријентација у процесу анализе ометала је ученике да у решаваним задацима открију и разумеју унутрашње везе и односе међу величинама. Истраживање је показало да ученици на тесту задатке решавају применом наученог поступка који се показао неделотворним када је требало решити задатак који је по форми различит од задатака које су раније с успехом решавали. Слаб успех ученика и на сложенијим задацима наводи на закључак да у настави математике нису довољно овладали вештинама решавања задатака. Истраживање имплицира потребу да се размисли и евентуално коригује постојећа методичка концепција оспособљавања ученика за решавање задатака.*

Кључне речи: *математички задаци, анализа, процес решавања, поступак решавања и општи принцип решавања.*

HOW ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS ANALYSE AND SOLVE MATHEMATICAL TASKS

Abstract *The paper presents the results of an empirical research aimed at establishing how elementary school students analyse and solve mathematical tasks. The testing comprised 208 students and the research results showed that the students relied on the immediately perceived and external characteristics of the tasks. Such an orientation in the process of analysis biased the students to discover and understand internal connections and relationships among variables in the tasks they were to solve. The research further showed that the students applied the procedures they had learnt but these proved inefficient when they were expected to solve the tasks which differed from those they had successfully solved earlier. A rather low rate of successfully solved test tasks suggests that the students had not sufficiently mastered the skills for solving mathematical tasks. This implies the need for rethinking and improving teaching methods and techniques in order to enhance further development of the students' skills for solving mathematical tasks.*

Keywords: *mathematical tasks, analysis, solving process, solution procedure, general solution principle.*

[1] sasadub@gmail.com

КАК УЧЕНИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ АНАЛИЗИРУЮТ И РЕШАЮТ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Резюме *В работе приводятся результаты эмпирического исследования, проведенного в целях определения, каким способом ученики основной школы анализируют и решают математические задания. Исследование проведено на примере 208 учеников. Результаты исследования показали что ученики при анализе опираются на непосредственно увиденные и внешние характеристики заданий. Такой способ мешал ученикам в решаемых заданиях открыть и понять внутренние связи и отношения величин. Исследования показали, что ученики решают задания теста, применяя заученый поступок, который оказался недейственным в решении заданий отличающхися по форме от раньше решаемых с успехом заданий. Плохой успех учеников в решении более сложных заданий приводит к выводу что в преподавании математики они не в достоточной степени овладели умением решать задания. Исследование указывает на необходимость коррекции существующей методической концепции подготовки учеников к решению заданий.*

Ключевые слова: *математические задания, анализ, процесс решений, поступок решений и общий принцип решений.*

Теоријска основа

Способност успешног решавања задатака један је од основних показатеља нивоа учениковог математичког развоја и разумевања математичког садржаја. Због тога је решавање задатака основни и најважнији елемент наставе математике, било да се ради обради новог градива, увежбавању и систематизовању претходно наученог или проверавању знања. Сваки ученик у току школске године реши велики број задатака. Решавајући различите задатке, ученици треба да овладају општим принципом решавања задатака целе класе, што ће им омогућити да, без обзира на форму, реше сваки задатак те класе. Међутим, један број ученика не успева да реши задатке ако се они мало разликују од задатака које су раније решавали, правдајући се познатом реченицом: „*Ми такве задатке на часу нисмо решавали*“. Узрок њиховог неуспеха није у броју решених задатака, јер је немогуће решити све могуће варијанте задатака неке класе, већ у приступу процесу решавања. Они се најчешће труде да користећи готове поступке што пре дођу до тачног решења не размишљајући пуно о задатку. Ти ученици не анализирају ни решене задатке, нити из сопственог решења изводе опште методе и начине решавања. На тај начин се код њих формира мутна слика или погрешна представа о суштини решења, па и самом задатку. Takoђе, за њих остаје непозначница како треба анализирати задатак да би се открио општи принцип и које су неопходне етапе процеса решавања.

Понекад се општи принцип решавања може открити изненада, већ на првом задатку неке класе, што је карактеристично за ученике који су талентовани за математику (Крутецкий, 1968). Али, општи принцип за велику већину ученика је резултат анализе већег броја математичких задатака и разумевања односа који владају у структури тих задатка. Због тога неки аутори (Фридман, 2005, Solso, 1998) *анализу задатка* издвајају као прву и основну етапу процеса решавања. Да би се уопште приступило решавању, потребно је да ученик прво разуме задатак и његове услове, да правилно схвати захтев. Фридман (2005) сматра да се разјашњење карактера и типа задатка и утврђивање услова и захтева обавља у сваком задатку, чак и најпростијем. Код сложенијих задатка, према његовом мишљењу, анализа почиње већ приликом читања текста и понавља се приликом сваке нове претпоставке о решењу, па и приликом преласка са једне етапе на другу.

Након анализе, некад треба нешто формулисати, записати и у том случају се најчешће прави *шематски запис* или се користи модел одређеног типа. Модел неки аутори (Biehler, Snowmen, 1986) дефинишу као репрезентацију задатка, и она следи одмах после извршене анализе. Репрезентација задатка тумачи се као модел који субјект конструише да би сумирао или разумео задатак у његовој суштинској природи (Novick, Bassok, 2005).

У класичним радовима (Polya, 1956) који су послужили као основа за наведена новија схватања, уместо анализе говори се о разумевању као првој етапи решавања задатака, која претходи стварању плана решавања. Истиче се потреба да ученик схвати текст задатка и оно шта се од њега тражи да би приступио разматрању главних делова задатка. У томе треба да му помогне наставник питањима која се односе на познате и непознате величине у структури задатка. Разматрање главних делова задатка није ништа друго него анализа усмерена на успостављање везе између познатих и непознатих величина у задатку, односно ученик се увек суочава с потребом да у подацима који му се презентују у некој форми, у овом случају у форми задатака, кроз анализу открије и издвоји суштинска својства, а затим их уопшти на све случајеве неког система. Сигуран показатељ да је ученик овладао општим принципом решавања јесте његова способност да решење једног задатка уопшти на све задатке једне класе.

Према мишљењу Рубинштајна (1981), решити неки задатак теоријски, значи решити га не само за дати појединачни случај, већ и за све случајеве исте класе. Може се рећи да је један од циљева наставе математике да ученика доведе у ситуацију да задатак сваке класе у једном тренутку реши теоријски. Тада ученик лако преноси принцип решења на све задатке класе, при чему га, према речима Крутецког (Крутецкий, 1968), не збуњује податак да се у једном задатку говори о зечевима, а у другом о новцу или километрима. На успех у решавању не утиче форма задатка нити спољашње чулно доступне карактеристике, јер је ученик концентрисан на анализу унутрашњих веза и односа које владају у структури задатка. Међутим, један број ученика не анализира адекватно услове задатка и не открива унутрашње везе и односе, што доводи до неуспеха у решавању задатка. Разлоге за неуспех, према неким ауторима, треба тражити у постојећој концепцији наставе и ставу дидактичара и методичара према процесу сазнавања и учења.

Давидов (Давыдов, 1996) сматра да је приступ дидактичара проблему сазнавања формално-логички, и да га карактерише:

– тумачење општег као нечег које је само једнако и истоветно за групу предмета или појава;

– тумачење суштинског само као карактеристичне особине класе предмета или појава;

– описивање прелаза од посматрања ка представи, а од ње ка појму.

Истовремено, у дидактичкој литератури, према Давидову (Давыдов, 1996), презентује се шема формирања појмова која је идентична шеми формирања емпиристички схваћених појмова. Према тој шеми, у настави се сазнавање креће од појединачног ка општем, при чему се до општег долази посматрањем и упоређивањем различитих предмета. На тај начин се опште и суштинско тумачи као нешто што је слично, заједничко или једнако за неку класу предмета или појава. Такво опште, Давидов назива формално општим и, према његовом мишљењу, оно је чист продукт рационалне прераде чулних података, које омогућава да се нека разноврсност представи и опише само у скраћеном, ограниченом виду.

По Давидову, последица формално-логичког приступа процесу сазнавања и учења у настави јесте у томе што за ученика остају скривене разлике између несуштинских, формално сличних својстава, с једне стране, и суштинских унутрашњих својства предмета и појава, с друге стране. Идентификација спољашњих особина предмета и појава као средства за упознавање садржаја појмова доводи до тога да њихови аутентични извори за ученике остану у току образовања неоткривени. Критика Давидова је разумљива јер се посматрањем може допрети само до спољашњих особина, док унутрашње везе и односи у неком систему предмета и појава остају неоткривени.

Пијаже (1983) расправљајући о пореклу сазнања каже: „Наша сазнања не происходе ни из чулних утисака, нити из самог опажања, већ из целовите акције у којој опажање има само функцију обавештавања." „Објекат се суштински може сазнати само ако се на њега делује и ако се он трансформише, а за то, према Пијажеу, постоје два начина. Први начин је физичка акција којом се само истражује природа објекта, а други логичко-математичка акција која се састоји у обогаћивању објекта новим односима и својствима. Такође, слично Давидову, Пијаже констатује да ако се физичко сазнање полазећи од чулних утисака од њих све више удаљава, то је из разлога што оно и не происходи из чулних утисака и чистог опажања, већ од самог почетка подразумева једну логичко-математичку шематизацију опажања и акције које треба извршити на објекту.

У Правилнику о наставном програму за четврти разред (2006) дају се упутства за остваривање програма наставе математике у целини. Када је реч о текстуалним задацима, наставницима се препоручује да приликом решавања сложенијих задатака ученик усмери пажњу на анализу услова задатка и стварање плана његовог решавања. Такође, ученик треба да прикаже цео ток решавања задатка, операције и њихов редослед, као и бројеве који су објекат тих операција. Правилником се предвиђа да ученик у свакој конкретној ситуацији задатке решава „најрационалнијим начином, уз употребу дијаграма, шема и других средстава приказивања" (2006, стр. 56).

Наведена упутства у складу су с теоријским поставкама које указују на основне елементе процеса решавања задатака. Међутим, поставља се питање да ли се ученици у настави адекватно оспособљавају за решавање различитих математичких задатака, односно да ли стичу неопходне навике и вештине за анализу услова и проналажење решења задатка. Питање има смисла с обзиром на неке изнете критике које се упућују постојећој настави, као и на чињеницу да су ученицима математички садржаји тежи него садржаји других наставних предмета.

Методологија истраживања

Циљ и задаци истраживања

Циљ истраживања је био да се утврди да ли ученици адекватно анализирају и решавају различите математичке задатке.

На основу циља формулисани су следећи задаци истраживања:

– Испитати како ученици у процесу решавања различитих математичких задатка анализирају услове;

– Открити евентуалне тешкоће које ученици имају приликом решавања различитих математичких задатака;

– Испитати да ли ученици решавају задатке применом општег принципа решавања.

Хипотезе истраживања

У истраживању су формулисане две посебне хипотезе:

– Ученици анализирају задатке с циљем да открију унутрашње везе и односе међу величинама у структури задатка;

– Ученици решавају задатке применом општег принципа којим се решавају сви задаци неке класе.

Узорак

Узорак истраживања чинило је 208 ученика четвртог разреда основне школе. Изабран је овај узраст јер он у развојном и образовном смислу представља завршетак једног периода, што омогућава да се изведу одређени закључци и генерализације који се могу односити и на ученике млађих разреда.

Методе, технике и инструмент истраживања

Истраживање је дескриптивно-аналитичког карактера, а техника рада је тестирање. Примењен је тест са задацима посебно формулисаним за потребе истраживања. У оквиру теста заступљени су задаци који испитују карактеристике ученичке анализе, процеса и начина решавања. Тест садржи седам задатака.

Резултати истраживања

Првим задатком на тесту (Задатак 1) од ученика је тражено да анализом три математичке једнакости открије заједничку карактеристику две једнакости, односно да уочи која се једнакост разликује од остале две.

Задатак 1:

1. задатак

У задатку су написане три једнакости. Једна једнакост се разликује од остале две. Заокружи једнакост која се разликује и напиши зашто си заокружио ту једнакост.

а) Заокружи једнакост која се разликује:

1) 40200 + 8200 = 8200 + 40200

2) 30200 + (11200 + 7200) = (11200 + 7200) + 30200

3) $124 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 124$

Зашто си заокружио ту једнакост?

____

Математичке једнакости указивале су на нека од својстава математичких операција (замена места сабирака, замена места чинилаца и здруживање сабирака), које су и биле кључ решења 1. задатка на тесту. Први и трећи израз су слични јер је њима показано да замена места сабирака и чинилаца као својство математичких операција не утиче на збир или производ, док друга једнакост указује на својство здруживања сабирака. Међутим, ученици анализом једнакости нису успешно откривали наведена својства. Највећи број ученика био је заведен спољашњом и математички небитном сличношћу прве и друге једнакости. Наиме, код наведених једнакости иста је математичка операција (сабирање) и употребљени су цели природни бројеви. Трећа једнакост се разликовала управо операцијом (множење) и бројевима (разломци).

Први задатак је успешно анализирало седам ученика или 3,37% од укупног броја. Пажња већине ученика приликом анализе била је усмерена на та два очигледна и у овим околностима небитна својства. Од укупног броја ученика, 145 је заокружило трећу једнакост као различиту. Објашњавајући своју одлуку, као аргумент ученици су наводили да се, за разлику од друге две где се сабира, у трећој једнакости бројеви множе.

Такође, ученици су у анализи издвајали и врсту бројева као карактеристику на основу које се разликују једнакости.

Типични одговори на 1. задатак

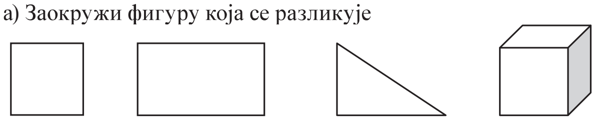
Типични одговори	f	%
Множе се половине а не цели бројеви; Зато јер се множи.	145	69,71

Остали погрешни одговори (било их је знатно мање) нису разматрани јер је није било јасног и прецизног критеријума на основу којег су једнакости анализиране.

У другом задатку (Задатак 2.) од ученика је на тесту тражено да заокружи геометријску фигуру која се разликује од осталих фигура у низу. Цртежима су представљене три геометријске слике и једно геометријско тело. С обзиром на то да је настава геометрије у елементарним облицима присутна још од почетних разреда, пошло се од претпоставке да ученици разликују геометријска тела од геометријских слика. Такође, ученици би с обзиром на то да у 4. разреду израчунавају површине и запремине геометријских фигура, требало да знају да се геометријска тела приказују у простору, а геометријске слике у равни.

Задатак 2.

2. задатак
Једна од четири геометријске фигуре не припада низу. Заокружи фигуру која се разликује и напиши зашто си је заокружио.
а) Заокружи фигуру која се разликује



б) Зашто си заокружио ту фигуру?

____

Као што се може видети цртежима су представљени квадрат, правоугаоник и троугао као геометријске слике и коцка као геометријско тело. Међутим, коцка је визуелно слична квадрату и правоугаонику. Исто тако, троугао се према перцептивним карактеристикама разликује од осталих фигура. Наведене околности могле су ометати ученичку анализу.

Услове у задатку успешно је анализирало и на крају решило 54 ученика или 25,96%. У ком правцу је текла анализа ученика који нису тачно одговорили на захтев? Приступајући задатку, већина ученика се руководила перцептивном сличношћу квадрата, правоугаоника и коцке, занемарујући чињеницу да је коцка за разлику од осталих фигура геометријско тело. На тај начин анализирајући услове задатка 110 ученика (52,88%) заокружило је троугао као фигуру која се разликује од осталих фигура у низу .

Типични одговори на 2. задатак

Типични одговори	f	%
Троугао Зато што нема четири странице Зато што има три троугла Нема исти облик Зато што је троугао	110	52,88

Посматрајући геометријске фигуре, велики број ученика се у анализи руководио спољашњим, визуелно израженим својством, занемарујући односе који изражавају наведене фигуре. Тиме је облик као несуштинско својство геометријских фигура добио статус суштинске карактеристике.

У трећем задатку (Задатак 3.), као и у претходна два, од ученика се очекивало да анализирају задатке и издвоје суштинску карактеристику или однос. Наведена су три задатка, а од ученика је тражено да заокруже два која су слична и да објасне разлоге због чега су их заокружили. Задатке није требало решавати, већ само анализирати математичку структуру како би се открила повезаност.

Задатак 3.

3. задатак Од наведена три задатка без израчунавања заокружи два која су најсличнија и напиши зашто си их заокружио Милош је имао 1200 динара. Трећину новца је потрошио на куповину књига и позајмицу брату. Брату је дао 150 динара. Колико је новца потрошио на куповину књига? Милан има 230 динара а Јован 180 динара. Јованов брат има три пута више него Милан и Јован заједно. Колико новца има Јованов брат? Који ћемо број добити када од количника бројева 896 и 14 одузмемо 50?

Адекватну анализу могла је да омета околност да су 1. и 2. задатак споља гледано слични (слични текстом), али различити структуром и односима који у њој владају. Идентичну математичку структуру имали су 1. и 3. задатак, али се трећи задатак формом знатно разликовао од остала два задатка.

Задатак је правилно анализирало 43 ученика (20,67%). Они су на основу веза и односа у структури задатака исправно закључили о сличности задатака. Међутим, може се рећи да је код великог броја ученика правилна анализа изостала, а њихова пажња била је усмерена на садржај текста задатка, односно на радњу која је текстом описана. Од укупног узорка, 101 ученик (48,65%) је заокружио 1. и 2. задатак као сличне, занемарујући у потпуности структуру и начин на који се решавају, а уважавајући пре свега њихову формалну сличност .

Типични одговори на 3. задатак

Типични одговори	f	%
Слични су 1. и 2. задатак Ради се о брату Ради се о новцу Зато што су текстуални	101	48,56

Овде су приказани типични одговори ученика у 3. задатку. На основу њих се може закључити да је већина ученика анализирала чулно доступна и нематематичка својства задатака и на основу њих просуђивала о сличности. Треба рећи да је један број ученика, без обзира на инструкцију у тесту и напомене испитивача током тестирања, ипак решавао задатке покушавајући да у процесу решавања и резултату открије сличност.

Предмет математике као науке су количински односи и просторне форме. У претходном, геометријском задатку предмет анализе нису биле просторне форме и односи које оне изражавају, а у 3. задатку ученици нису анализирали количинске односе. Предмет њихов анализе била су спољашња и за математику небитна и ирелевантна својства.

Да би ученик овладао општим принципом решавања задатака, треба да самостално и уз одговарајуће сугестије наставника анализира унутрашње везе и односе у задатку, прође кроз све неопходне етапе решавања, реши задатак и на крају поново анализира цео процес и изведе одређене закључке. Када на такав начин ученик овлада општим принципом решавања, тада он сваки појединачни задатак неке класе, без обзира на евентуалне спољашње и по процес решавања небитне разлике, схвата као посебан случај који се решава тим општим принципом.

За разлику од уопштавања општег принципа, примена наученог и на часу запамћеног поступка решавања своди се на покушај ученика да препозна у чему је нови задатак сличан са задацима које је раније решавао. Ако сличности, најчешће спољашње, нема, он није у стању да га реши, односно примени поступак решавања.

Да би се испитало да ли су ученици овладали општим принципом и да ли анализирају унутрашње везе и односе у задатку, формулисани су задаци 4. и 5.

Задатак 4.

4. задатак За један дан 18 кројача сашије 90 блуза. Колико ће блуза за један дан сашити 24 кројача. Постави израз и израчунај!

Ови задаци имају идентичну математичку структуру и решавају се на исти начин, али 4. задатак је аритметички, а 5. задатак је постављен алгебарски. Значи промењена је само форма, док су сви остали суштински елементи структуре и односа остали исти. Иначе, структура и решавање овог типа задатака је једноставна и не може се сматрати фактором евентуалног слабијег успеха.

Задатак 5.

5. задатак *Предраг је за* **А** *дана прочитао* **В** *страница књиге. Колико ће страница књиге Предраг прочитати за* **С** *дана?* Помоћу слова напиши израз којим се решава задатак!

Од укупног узорка, 4. задатак је с успехом решило 109 ученика или 52,40%, а 5. задатак само 19 ученика или 9,14%. Разлика међу процентима статистички је значајна (t = 10,85) на нивоу 0,01.

Узрок доста слабијег успеха ученика у решавању 5. задатка треба тражити у настави и методичкој концепцији према којој се ученици оспособљавају за решавање математичких задатака. Наиме, у настави често одсуствује анализа задатка с циљем да се утврди однос међу величинама, прескаче се самостална поставка израза и избор математичке операције којом се решава задатак. Такође, аутори уџбеника с циљем да олакшају разумевање и решавање задатка презентују готов израз с рачунским операцијама, чиме се активност ученика у процесу решавања своди на просто рачунање. У таквој ситуацији ученик не може ништа друго него да се труди да правилно запамти поступак којим се решава задатак, као неку врсту обрасца примењљивог на друге задатке[2]

У немогућности да на 5. задатак примене поступак који је био успешан у решавању 4. задатка, један број ученика је слова у задатку замењивао својим бројевима, покушавајући да на тај начин „олакша" решавање (постављање израза којим се решава задатак). Поједини аутори (Крутецкий, 1964) који су истраживали проблеме решавања алгебарских задатака закључили су да се недовољна способност за уопштавање математичког материјала може окарактерисати као неспособност закључивања о општем у ситуацијама када постоји спољашња различитост. Истраживања говоре да је ученицима тешко да се одвоје од конкретних бројевних израза, да словним уопштавањима замене бројеве. У томе је основна тешкоћа проучавања алгебре. Исту тешкоћу имали су и ученици у овом истраживању, не успевајући да у мало промењеним условима примене познати поступак решавања.

Једно од основних правила у настави математике је да ученик не почиње решавање уколико није у потпуности проучио и схватио текст задатка, уочио све податке и разумео захтев и схватио функционалне зависности међу величинама (познатих и непознатих) у задатку (Метельский, 1982). На основу анализе процеса решавања задатака на тесту, стиче се утисак да су многи ученици приступали решавању а да претходно нису обавили све неопходне радње.

Према методичкој концепцији и уџбеницима математике, ученици треба да реше известан број задатака како би систематизовали методе и начине решавања и открили оно што је опште за целу класу задатака. Међутим, у пракси та последња инстанца често изостане, тако да један број

[2] О сличним проблемима и тешкоћама у настави математике расправља у чланку Првановић, С. (1981): О разумевању уопште и посебно у настави математике, Настава и васпитање, бр. 2.

ученика остане на нивоу запамћеног поступка. Најважније је памћење и репродукција начина решавања, а не самостално откривање пута решавања новог задатка. Уочљива је још једна појава. Ученици у старијим разредима основне школе заборављају научене аритметичке начине решавања задатака (Давыдов, 1969).

Најсложенији на тесту био је 6. задатак . Сложеност се огледала у томе да је поред основне зависности, која се у процесу решавања могла „испустити", задатак имао и више споредних зависности.

Задатак 6.

6. задатак *Стара машина била је тешка 210 килограма. После усавршавања конструкције постала је за $1/3$ лакша. Колико материјала је могуће уштедети прављењем 10 нових машина. Постави израз и израчунај.*

Основни однос у овом задатку, из ког произилазе остали односи, јесте однос између величине која изражава тежину старе машине и величине која изражава тежину модификоване машине. Промена основног односа довела би до промене математичке структуре и захтева задатка. Без разумевања основног односа не може се решити било који појединачни задатак и усвојити општи принцип решавања било које класе.

Задатак се могао решити на два начина:

основна зависност
1. [(210 – (210 – 210 :3)] · 10 =
2. (210 · 10) – (210 – 210 : 3) ·10 =
основна зависност

Да би се могао анализирати процес решавања и открити евентуални узроци неуспеха, формулисан је 7. задатак који се на исти начин решавао. У 7. задатку од ученика је тражено да га не израчунавају, већ речима опишу поступак његовог решавања. С обзиром на то да задатак, условно речено, има три етапе решавања, ученици су инструкцијама у тесту били усмерени да поступно опишу те етапе. Претпостављало се да ће на тај начин ученицима бити олакшана анализа услова задатка и проналажење основне зависности.

Задатак 7.

7. задатак
Млекара је дневно производила 720 литара млека. После увођења нове технологије производња је повећана за ⅓. Колико ће више литара млека произвести млекара са новом технологијом за 30 дана?
Без израчунавања, речима опиши шта и којим редом треба израчунати да би се добило тачно решење задатка.
Прво треба израчунати:____
Затим треба израчунати:_______________________________________
На крају треба израчунати:_____________________________________

Од укупног броја ученика, 6. задатак је правилно решило 25 или 12,02%, а у 7. задатку тачан опис је дало 17 или 8,17% ученика. Где су ученици најчешће грешили? Анализом тока решавања 6. задатка и описа решавања у 7. задатку, уочено је да у овом типу задатака ученици у анализи задатака не издвајају основну зависност. У 6. задатку су најчешће постављали само део израза, односно непотпуни израз:

(210 – 210 : 3) · 10 =

Наведени израз представља само део односа у структури задатка. Он изражава само део односа у условима задатка и указује да ученици имају тешкоћу када треба анализирати сложеније односе у математичком задатку.

У 7. задатку грешка се поновила, иако је захтев усмеравао ученике да обаве анализу услова, утврде етапе и редослед рачунских операција у процесу решавања. Математичка структура и основна зависност била је истоветна као у претходном задатку, различита је била само једна математичка операција која суштински није мењала односе у структури задатка.

osnovna zavisnost
1. [(720 + 720 : 3) – 720] ·30 =
2. (720 + 720 : 3) ·30 – (720 · 30) =

osnovna zavisnost

Ученици су погрешно описивали ток решавања задатка, понављајући овога пута у вербалном опису грешку коју су чинили решавајући 6. задатак – нису од величине која представља количину млека коју производи млекара са новом технологијом, одузимали величину која представља производњу млека са старом технологијом. У овом задатку, као и претходном, показало се да ученици анализом услова не откривају основни однос и не успевају да примене поступак којим се решава задатак.

Закључна разматрања

Прва и веома значајна етапа процеса решавања математичких задатака јесте анализа. Од анализе зависи да ли ће остале етапе процеса решавања (формулисање плана решавања, тражење решења и решење) бити адекватно постављене и изведене. Истраживање је показало да се ученици анализирајући услове задатка руководе спољашњим и чулно доступним карактеристикама (врста бројева, облик геометријских фигура, текст задатка, итд.), што омета правилно разумевање и решавање задатка. Већина ученика није успешно анализирала унутрашње везе и односе у структури математичких задатака, чиме није потврђена прва хипотеза истраживања. Претпоставка је да, као што и указују поједини аутори (Давыдов, 1996), постојећа методичка концепција која се примењује у настави математике не усмерава ученике да анализирају унутрашње везе и односе предмета и појава, већ је процес сазнавања и учења заснован на посматрању и мисаоној обради чулно перципираних података.

Тешкоће приликом анализе унутрашњих веза и односа манифестовале су се и у задацима у којима је било неопходно анализом разумети основни однос. Ученици су недовољно успешно анализирали и решавали задатке сложеније структуре и односа, због чега су неуспешно примењивали поступак решавања те класе задатака.

Када ученици решавају задатак, њихов непосредни циљ је да пронађу тачно решење и одговор на захтев задатка. При томе, радњи и етапа које у процесу решавања обавља он не мора бити свестан, због чега се често навике и вештине које се тичу решавања задатака недовољно развијају и учвршћују. Зато аутори (Фридман, II, 2005) који истражују процес решавања задатака сматрају да је поред тачног решења задатка подједнако важно да се ученик сконцентрише и на радње које претходе решењу. Тека тада се може очекивати да се код њега појаве и развију позитивне навике и вештине решавања задатака.

Успешност на 4. и 5. задатку указује на то да су ученици математичке задатке решавали применом наученог поступка, који се показао нефункционалним у ситуацији у којој треба решити задатак који се по форми разликује од већине задатака исте класе. Да су ученици имали формирану навику да анализирају унутрашње математичке везе и односе и општи принцип решавања задатака, за њих не би представљао тешкоћу решавање једноставног задатака задатог у алгебарској форми. Такав задатак би тада схватили само као појединачни случај познате врсте задатака.

На основу резултата које су ученици постигли 4. и 5. задатку, као и на најсложенијим 6. и 7. задатку, не може бити потврђена друга хипотеза истраживања. Закључак је да ученици задатке решавају покушавајући да примене научени поступак.

Тачно решење и правилан одговор ученика на захтев често не значи да је ученик оспособљен за успешно решавање целе класе задатака. Резултати истраживања наводе на закључак да се у настави математике пажња мора поклањати свим етапама процеса решавања, нарочито самосталној анализи унутрашњих веза и односа у задатку и другим значајним математичким навикама и вештинама (прављење записа, плана решења, формирање модела, анализа радњи и провера решења). Такође, резултати недвосмислено показују да уколико ученик правилно не анализира задатак, најчешће изостаје тачно решење. Успешна анализа задатка је једна од претпоставки да ученик усвоји општи принцип решавања задатка целе класе и успешно овлада математичким знањима које предвиђа програм.

Литература

Biehler, R. F. Snowman, J. (1986): *Psychology Applied to Teaching*, Boston: Houghton Mifflin Company.

Давыдов, В. В. (1996): *Теория развивающего обучения,* Москва: Интор.

Давыдов, В. В. (ред) (1969): *Психологические возможности младших школьников в усвоении математики*, Москва: Просвещение.

Крутецкий В. А. (1968): *Психология математических способностей школьников*, Москва: Просвещение.

Крутецкий В. А. (1964): *Вопросы психологии способностей школьников*, Москва: Просвещение.

Метельский, Н. В. (1982): *Дидактика математики*, Минск: БГУ.

Novick, L. R. Bassok (2005): *Problem Solving*, u M. Holyoak, K. J. Morisson R. G. edited by *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning*, Cambridge: Cambridge University Press.

Пијаже, Ж. (1983): *Порекло сазнања*, Београд: Нолит.

Polya, G. (1956): *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Zagreb: Školska knjiga

Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања, 2006. година, Београд: Просветни преглед.

Првановић, С. (1981): О разумевању уопште и посебно у настави математике, *Настава и васпитање*, бр. 2.

Рубинштајн, С. Л. (1981): *О мишљењу и путевима његовог истраживања*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Solso, R. L. (1998): *Cognitive psychology*, Reno: University of Nevada.

Фридман, Л. М. I (2005): *Как научиться решать задачи,* Москва: Просвещение.

Фридман, Л. М. II (2005): *Теоретические основы методики обучения математике*, Москва: УРСС.