THEORIA 2
BIBLID 0351–2274 : (2010) : 53 : p. 41-52

UDK 510 Гедел К. ; 141.131 Гедел К.
Originalni naučni rad
Original Scientific Paper

Miloš Adžić

ONTOLOŠKA I EPISTEMOLOŠKA DIMENZIJA GEDELOVOG PLATONIZMA

APSTRAKT: *Kurt Gedel, jedno od najvećih imena dvadesetovekovne logike i matematike, svakako je najpoznatiji predstavnik matematičkog platonizma. Cilj ovog rada je da ispita različite aspekte Gedelovog platonizma, kao i argumente koje mu iznosi u prilog. Videćemo da i pored problema sa kojima se platonizam suočava, postoji mnogo toga što ga preporučuje kao jedinu održivu poziciju u filozofiji matematike.*

KLJUČNE REČI: *Kurt Gedel, matematički platonizam, teorija skupova, hipoteza kontinuuma, nezavisnost.*

Kakva je priroda matematičkih objekata? Da li oni uopšte postoje? Ukoliko postoje, da li njihovo postojanje zavisi od nas samih ili, pak, postoje nezavisno od naše svesti? U vezi sa ovim nameće se pitanje našeg znanja o ovoj vrsti objekata. Ova dva pitanja stoje u neraskidivoj vezi. Koje god stanovište zauzeli u pogledu načina saznanja matematičkih objekata, ujedno smo dužni da damo nekakav odgovor na pitanje kakve sve stvari postoje u sferi matematičkog. I obrnuto, ako pođemo od stanovišta koje daje odgovor na pitanje o postojanju matematičkih objekata, drugo pitanje, koje se tiče načina na koji ih saznajemo, postaje neizbežno. Mnoga druga važna pitanja se javljaju kao posledica ovih, a naši odgovori na njih umnogome će opredeliti poziciju koju zauzimamo u filozofiji matematike.

Predmet ovog rada je da, koliko je to moguće, rasvetli poziciju Kurta Gedela u odnosu na pomenuta pitanja. Na njegovom primeru ćemo videti da uzajamna povezanost ovih odgovora može dovesti do finog raslojavanja unutar nečega što, na prvi pogled, izgleda kao monolitna filozofska pozicija.

Gedelova pozicija u filozofiji matematike uobičajeno se označava kao platonizam, odnosno, gledište po kojem matematički objekti postoje nezavisno od naše svesti.[1] Iako prećutno prihvatan kao "radna" hipoteza mnogih savremenih matematičara, platonizam je sve samo ne opšte prihvaćen kada je potrebno da se matemati-

1 Postojanje ovde treba razumeti u apstraktnom smislu. Objekti kao što su brojevi, skupovi ili trouglovi ne postoje u prostorno-vremenskom kontinuumu kao što je slučaj, primera radi, sa zvezdama, protonima i šoljama za kafu.

čari izjasne u pogledu svojih filozofskih stanovišta. Ovo je donekle razumljivo ukoliko se uzme u obzir problem postuliranja apstraktnih objekata, kao i epistemološki problemi vezani za mogućnost njihovog saznanja. Zašto uopšte prihvatiti filozofsku poziciju koja je u ovoj meri problematična? Jedan mogući odgovor na ovo pitanje bio bi da platonizam predstavlja opravdanje matematičke gramatike. Upravo ovo predstavlja važnu komponentu Gedelovog stanovišta.

S obzirom na platonističko stanovište, Gedelov odgovor na pitanje o statusu matematičkih objekata je očekivan: oni postoje nezavisno od svesti, kao i našeg saznanja o njima. Odgovor koji je ponudio u pogledu mogućnosti njihovog saznanja je, međutim, mnogo kompleksniji. U prikazima Gedelovog platonizma često se navodi njegovo uverenje da posedujemo sposobnost matematičke intuicije, analogne čulnom opažanju, koja nam omogućava saznanje matematičkih objekata.[2] Međutim, uprkos činjenici da je Gedel svojim opaskama zaista upućivao na jedno takvo gledište, ovo ni u kom slučaju ne iscrpljuje sve njegove argumente u prilog platonizma. U nastavku ćemo videti da Gedel iznosi argumente za platonizam koji su nezavisni od njegovog shvatanja matematičke intuicije kao i da postoje mesta koja upućuju na to da Gedel vidi platonizam, uprkos svim njegovim nedostacima, kao jedino održivo stanovište. Takođe, ne smemo gubiti iz vida činjenicu da Gedelovi argumenti nisu argumenti filozofa koji nastupa sa dobro utvrđene filozofske pozicije. Smatrati ih takvim, činilo bi nepravdu prema njemu. Naprotiv, Gedel nastupa sa pozicije logičara sa istančanim razumevanjem matematičke i skupovno-teorijske prakse kao i dubokih rezultata logike i osnova matematike. Njegovi argumenti prirodno proističu kao posledice ovog razumevanja.

Gedelovi najpoznatiji radovi o načinu našeg saznavanja matematičkih objekata i njihovoj prirodi, akcenat stavljaju na našu sposobnost saznanja istina o transfinitnim skupovima. Ono što je dalo podsticaj takvom projektu jeste pitanje nezavisnosti Kantorove hipoteze kontinuuma od aksioma ZFC teorije skupova.[3] Hipoteza kontinuuma je po svom obliku prilično elementarno tvrđenje o strukturi univerzuma skupova. Naime, Kantor je krajem XIX veka pokazao da je kardinalnost skupa realnih brojeva striktno veća od kardinalnosti skupa prirodnih brojeva. Ovaj Kantorov rezultat otvara neka pitanja. Da li je kardinalnost skupa realnih brojeva sledeća po redu beskonačna kardinalnost veća od kardinalnosti skupa prirodnih brojeva? Ili pak postoje skupovi koji se po kardinalnosti nalaze između skupova prirodnih i realnih brojeva? Hipoteza kontinuuma kaže da ovakvi skupovi ne postoje i da je kardinalnost skupa realnih brojeva upravo sledeća veća u odnosu na kardinalnost skupa prirodnih brojeva. Međutim, čak i nakon aksiomatizacije teorije skupova u prvoj polovini XX veka, nije se znalo da li je ovo tvrđenje istinito ili lažno.

2 P. Benacerraf, "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, Vol. 70, 1970, str. 661-679.

3 ZFC je skraćenica za Cermelo-Frenkel teoriju skupova (ZF) sa aksiomom izbora (AC).

Tridesetih godina prošlog veka Gedel je ispitivao ograničenje kumulativne hijerarhije[4] ZF teorije skupova, koja na svakom nivou ima skupove koji su definabilni pomoću skupova koji se nalaze na prethodnim nivoima. Model ZF teorije skupova dobijen na ovaj način ima to svojstvo da u njemu važe kako aksioma izbora, tako i uopštena hipoteza kontinuuma.[5] Ono što Gedelova konstrukcija pokazuje jeste da je hipoteza kontinuuma konzistentna sa aksiomama ZF(C) teorije skupova. Drugim rečima, ne postoji bojazan da će nakon usvajanja hipoteze kontinuuma kao dodatne pretpostavke, pored aksioma ZF(C), naš sistem postati inkonzistentan, naravno pod pretpostavkom da je ZF konzistentna teorija. Drugim rečima, ukoliko je ZFC konzistentna teorija, onda ona ne dokazuje negaciju hipoteze kontinuuma.

Bilo je potrebno da prođe nekih tridesetak godina, do 1963. godine, kada je Koen, primenom metode forsinga, konstruisao model ZF u kom ne važi hipoteza kontinuuma. Gedelovi i Koenovi rezultati zajedno daju nezavisnost hipoteze kontinuuma od aksioma ZFC teorije skupova. Nezavisnost ovog tvrđenja se ogleda u tome što ZFC, ukoliko je konzistentna, ne dokazuje ni hipotezu kontinuuma, niti njenu negaciju.

Treba istaći da napoznatiji Gedelovi stavovi o platonizmu datiraju iz perioda koji prethodi Koenovom dokazu nezavisnosti hipoteze kontinuuma. Međutim, čak je i tada smatrao verovatnim da će se hipoteza kontinuuma pokazati nezavisnom, što je i bio slučaj. Benaceraf u svojoj kritici[6] Gedelovog platonizma, kao centralan uzima rad "Šta je Kantorov problem kontinuuma?", koji je prvi put objavljen 1947. godine, da bi se dopunjena verzija pojavila 1964. godine, neposredno nakon što je Koen objavio svoj rezultat. U ovom radu Gedel se bavi pitanjem nezavisnosti hipoteze kontinuuma, kao i opštijim pitanjem faktora koji određuju istinitost tvrđenja koja se tiču skupova.

Ukoliko je hipoteza kontinuuma nezavisna od aksioma ZFC, postavlja se pitanje da li postoji nešto izvan ovih aksioma što može odrediti istinitost tvrđenja o skupovima. Fenomen nezavisnosti nam ne dopušta da kažemo da je istinito ono što naprosto sledi iz aksioma teorije skupova, jer aksiome ne mogu da odluče istinosnu

4 Grubo govoreći, kumulativna hijerarhija predstavlja kategorizaciju svih skupova po nivoima koje indeksiraju ordinali, počevši od praznog skupa iteracijom operacija partitivnog skupa i unije.

5 Uopštena hipoteza kontinuuma je tvrđenje da, za svaki ordinal α, važi

gde je

α-ta po redu beskonačna kardinalnost počevši od

, prve beskonačne kardinalnosti koja je istovremeno i kardinalnost skupa prirodnih brojeva. Služeći se ovim oznakama, hipotezu kontinuuma možemo izraziti kao

, gde je skupa realnih brojeva (kontinuum).

6 P. Benacerraf, "Mathematical Truth".

vrednost svih tvrđenja ove teorije. Tim pre, što je hipoteza kontinuuma prirodno tvrđenje o strukturi univerzuma teorije skupova. Čak iako neka tvrđenja o skupovima proglasimo naprosto nezavisnim, ne brinući previše oko usvajanja nekih dodatnih pretpostavki koje bi njihovu istinosnu vrednost fiksirale, hipoteza kontinuuma svakako nije jedno od njih. Zastupati gledište da teorija skupova nije dužna da pruži odgovor na pitanje da li je postoje skupovi kardinalnosti striktno veće od kardinalnosti skupa prirodnih brojeva, a opet striktno manje od kardinalnosti skupa realnih brojeva, analogno je gledištu da Peanove aksiome nisu dužne da pruže odgovor na pitanje da li postoji prirodan broj između 1 i 2. Jasno je da ukoliko postoji stanje stvari u domenu skupova koje aksiome opisuju, trebalo bi da te iste aksiome određuju istinosnu vrednost pitanja kao što je ovo. Međutim, da li možda postoji stanje stvari u domenu skupova koje se ne oslanja na aksiome kao garant sopstvene legitimnosti?

Jedan mogući odgovor na ovo pitanje je negativan. On nas lišava tereta da objasnimo šta to, pored standardnih aksioma, može odrediti istinosnu vrednost u domenu skupova. U ovom slučaju, pitanje da li je hipoteza kontinuuma istinita ili lažna ostaje bez odgovora. Možemo tvrditi i više. Pošto tvrđenja kao što je hipoteza kontinuuma nemaju određenu istinosnu vrednost u ZFC, onda su ona naprosto besmislena. Ovo otvara put raznim "alternativnim" teorijama skupova, slično onome što postoji u geometriji, gde bi u nekim od tih teorija hipotezu kontinuuma usvojili kao istinitu, dok bi u drugim kao istinitu usvojili njenu negaciju.

Ovakvo gledište se na prvi pogled kosi sa idejom da zaista postoje matematički objekti. Jer, tvrđenja o postojećim objektima treba da budu istinita ili lažna, a ne neodređena u pogledu istinosne vrednosti, što je ovde slučaj. Ovakvo antirealističko gledište zapada u teškoće time što naše znanje o skupovima čini u izvesnom smislu trivijalnim. Čini se da ono prestaje da bude znanje o bilo čemu.

Nasuprot tome, pretpostavka postojanja matematičkih objekata pruža nam nešto što može odrediti istinosnu vrednost tvrđenja u domenu skupova, baš kao što fizički objekti određuju istinosnu vrednost empirijskih tvrđenja. Ovo zapravo znači tvrditi da postoji stanje stvari koje uključuje skupove a koje nije u potpunosti obuhvaćeno našim aksiomama, što sledi iz rezultata nezavisnosti. To stanje stvari, dakle, nije *konstituisano* onim što sledi iz naših aksioma. Ovakvo gledište zastupa i Gedel tvrdeći da matematički objekti postoje "nezavisno od naše konstrukcije kao i od naše intuicije svakog od njih pojedinačno"[7], što je oštro suprostavljeno Brauverovom intuicionizmu koji priznaje "matematičke objekte samo ukoliko se mogu

7 K. Gödel, "What is Cantor`s continuum problem?" (1964), in: *Kurt Gödel Collected Works, Volume II*, Publications 1938-1974, ed. by S. Feferman, J. Dawson, S. Kleene, G. Moore, R. Solovay, J. van Heijenoort, Oxford University Press, 1990, str. 258.

interpretirati kao naše sopstvene konstrukcije ili bar mogu biti potpuno dati u matematičkoj intuiciji"[8]. Brauverov intuicionizam Gedel smatra pogubnim po teoriju skupova, a gledišta Poenkarea i Vejla, koja naziva "semi-intuicionističkim", smatra gotovo jednako razornim.

Međutim, iako možemo smatrati da matematički, baš kao i fizički, objekti postoje nezavisno od naše sposobnosti da ih konstruišemo ili opažamo, svakako se nameće jedna ključna razlika. Naime, mi posedujemo čulne opažaje kao deo mehanizma uz pomoć kog, pretpostavlja se, možemo steći znanje o fizičkim objektima. Iako je naše razumevanje povezanosti čulnih opažaja i znanja o fizičkim objektima nepotpuno, ono i dalje predstavlja izvor opravdanja, način da objasnimo pouzdanost naših verovanja o njima. Matematički objekti se umnogome razlikuju od fizičkih, a ovo čini epistemičku situaciju znatno drugačijom.

Naime, uticaj dokaza nezavisnosti na istinosnu vrednost tvrđenja razlikuje se čak i u različitim granama matematike, a u zavisnosti od njihove povezanosti sa fizičkim svetom. U tom smislu, Gedel poredi teoriju skupova sa geometrijom. Ako uzmemo u obzir nezavisnost Euklidovog postulata paralelnosti i nezavisnost hipoteze kontinuuma:

> "Mora se istaći da dokazom neodlučivosti pitanje gubi smisao samo ukoliko se aksiomatski sistem koji se razmatra interpretira kao hipotetičko-deduktivni sistem, tj. ukoliko se značenja primitivnih termina ostave neodređenim. U geometriji, primera radi, pitanje da li je Euklidov peti postulat istinit zadržava svoje značenje ukoliko se primitivni termini shvate u tačno određenom smislu, tj. tako da referiraju na ponašanje krutih tela, svetlosnih zraka, itd. Situacija je slična i u teoriji skupova, razlika je samo u tome što se u geometriji značenje, koje se danas najčešće usvaja, odnosi na fizičku pre nego na matematičku intuiciju, pa time odluka počiva van matematičkog domena. Sa druge strane, objekti transfinitne teorije skupova [...] nedvosmisleno ne pripadaju fizičkom svetu. "[9]

Dakle, za hipotezu kontinuuma ne postoji standard van matematičkog domena na osnovu kog se može utvrditi njena istinosna vrednost. U geometriji, istinosnu vrednost postulata paralelnosti možemo odrediti pomoću takvog spoljašnjeg standarda, naime na osnovu toga da li je postulat paralelnosti istinit ili ne kada se primeni na fizički prostor. Pozivanje na fizički svet nije nam dostupno u slučaju transfinitne teorije skupova, pa je jedino matematička stvarnost ta koja nam može biti od pomoći pri utvrđivanju istinosne vrednosti pitanja kao što je problem kontinuuma. Upravo iz ovog razloga Gedel mora da pokaže na koji način saznajemo istine o transfinitnim skupovima.

8 ibid, str. 258.

9 ibid, p. 267.

Po njegovom mišljenju, istinitost tvrđenja o skupovima jeste u krajnjoj instanci određena samim objektima: hipoteza kontinuuma je nešto što naprosto mora biti istinito ili lažno za ove objekte. Aksiome su onda samo opis jedne već postojeće matematičke stvarnosti i ukoliko postoje tvrđenja koja nisu odlučiva na osnovu ovih aksioma, onda moraju postojati delovi te matematičke stvarnosti koje ovi ne opisuju. Dakle, objekti sami, a ne aksiome ZFC teorije skupova, jesu ono što određuje istinitost tvrđenja o skupovima.

> "Ako se značenja primitivnih termina teorije skupova [...] prihvate kao valjana, sledi da pojmovi i teoreme teorije skupova opisuju neku dobro određenu stvarnost u kojoj Kantorova hipoteza mora biti istinita ili lažna. Dakle, njena neodlučivost na osnovu trenutno prihvaćenih aksioma može samo značiti da one ne sadrže potpun opis te stvarnosti."[10]

Takva slika je, međutim, nepotpuna bez objašnjenja kako možemo imati saznanje o toj matematičkoj stvarnosti. Benaceraf ističe da ovakvo gledište implicira da postoji sredstvo pomoću kojeg saznajemo matematičke istine, a koje je analogno čulnom opažanju. Mi posedujemo sposobnost matematičke intuicije i upravo ona predstavlja vezu između matematičkih objekata i našeg saznanja o njima. U prilog ovome Gedel ističe da nam se aksiome "nameću kao istinite"[11]. Aksiome možemo posmatrati tako da između njih i očiglednih empirijskih tvrđenja postoji jaka analogija. U pogledu obe vrste tvrđenja mislimo potpuno isto kada kažemo da nam se „nameću kao istinita", razlika leži u vrsti i sposobnosti opažanja. Mi posedujemo čulno opažanje kao sposobnost preko koje nam se nameće istinitost nekih očiglednih empirijskih tvrđenja. Njeno mesto u kontekstu matematičkih tvrđenja zauzeće matematička intuicija. Epistemološki posmatrano, naše znanje o matematičkim objektima nije zagonetnije od našeg znanja o fizičkim objektima, ali se u prilog tvrđenja da mi zaista posedujemo sposobnost matematičke intuicije, veoma malo toga navodi kao opravdanje.

Ovo problematizovanje teškoća sa kojima se suočava Gedelov platonizam previđa jedan važan aspekt njegove pozicije. Radi se, naime, o razlozima koje je imao za prihvatanje platonističkog stanovišta. Jer, ukoliko detaljnije ispitamo njegovu raspravu o platonizmu u radu o Kantorovoj hipotezi, čini se da Gedel ne nudi pozitivan argument u prilog platonizma već pre razmatranje problema kontinuuma sa platonističkog stanovišta. Smatrati ova gledišta o platonizmu razrađenim argumentima, donekle je nefer prema Gedelu. Ovo se može dodatno ojačati tvrđenjem da

10 ibid, str. 260.

11 ibid, str. 268.

sposobnost matematičke intuicije ne predstavlja suštinsku komponentu Gedelovog platonizma, kako se to na prvi pogled može činiti.

Tako, primera radi, Parsons[12] ističe da se Gedelovo shvatanje intuicije može veoma jasno razlikovati od gledišta onih koji sebe nazivaju intuicionistima. Prema Parsonsu, Brauver i njegovi sledbenici "dele paradigmu filozofske koncepcije matematičke intuicije koja seže od Kanta, prema kojoj se matematička intuicija tiče prostora i vremena kao formi naše čulnosti"[13]. Nasuprot tome, Gedel cilja na nešto drugo i to na

> "[o]no što bi neki filozofi (u kantovskoj tradiciji) nazvali teorijom uma, pre nego teorijom intuicije. Gedel je, naime, očigledno pod uticajem predkantovske tradicije koja ne vidi ova dva poduhvata kao oštro podeljena i dopušta "intuitivno saznanje" u onim slučajevima koji nama izgledaju potpuno pojmovno."[14]

Ovim nam se nameće izvestan oprez u pogledu toga u kojoj meri želimo da insistiramo na analogiji između čulnog opažanja i matematičke intuicije. Uzeti ovu analogiju previše ozbiljno, pridalo bi suviše težine ideji da je Gedel zastupao kantovsko gledište u pogledu prirode intuicije. Parsons posebno ističe jedan zanimljiv aspekt Gedelovog realizma, po kom on prihvata, pored realizma u pogledu objekata, i neku vrstu pojmovnog realizma. Drugim rečima, njegov realizam obuhvata i objekte koji su označeni predikatima. Ovo unosi promenu u Gedelov platonizam budući da se priroda matematičkih objekata može shvatiti nešto drugačije. Naime, ukoliko je Parsons u pravu, matematička stvarnost obuhvata ne samo skupove, već i skupovno-teorijske pojmove. Pojmovni realizam ne možemo naprosto redukovati na realizam u pogledu skupova, jer se u najmanju ruku "među svojstvima i relacijama između skupova kojima se teorija skupova bavi, nalaze i one čije ekstenzije nisu skupovi"[15], što možemo označiti kao realizam u pogledu klasa.

Međutim, Parsons citira i Gedelovo obraćanje iz 1933. godine, koje se fokusira na aksiomatizaciju teorije skupova, kao i na opravdanje tih aksioma. U obraćanju Gedel pravi i donekle iznenađujući osvrt na platonizam:

> "Rezultat prethodne diskusije jeste da naše aksiome, ukoliko se interpretiraju kao smislena tvrđenja, nužno pretpostavljaju neku vrstu platonizma koja nije

12 C. Parsons, "Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel`s though", *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 1, No. 1, 1995, str. 44-74.

13 ibid, str. 45.

14 ibid, str. 45.

15 ibid, str. 48.

u stanju da zadovolji kritički duh i koja čak ne može proizvesti uverenje da su one konzistentne. "[16]

Ovo je zanimljivo tvrđenje utoliko što nije u saglasju sa slikom koju imamo o Gedelu kao paradigmatičkom primeru platoniste. Jedan mogući način da interpretiramo ovo mesto bio bi da kažemo da Gedel, iako jasno uočava probleme sa kojima se platonizam suočava, ne vidi nijednu održivu alternativu ovoj poziciji. Gedelovu opasku možemo tumačiti i kao dobar razlog zbog kog bi trebalo da budemo platonisti. Iako postoje brojni problemi u vezi sa platonizmom, čini se da postoje i razlozi zbog kojih smo prinuđeni da ga prihvatimo.

Neposredan argument u prilog platonizma možemo naći u Gedelovom *Gibs predavanju* koje je održao 1951 godine. Ovo predavanje se može grubo podeliti u dva dela. U prvom delu se razmatraju određeni logički rezultati i njihove filozofske posledice, dok se drugi deo bavi filozofskim pitanjima, među kojima je i pitanje matematičkog platonizma. Logički rezultati koje Gedel navodi u prvom delu predavanja u vezi su sa pojmom matematičke neiscrpnosti ili nekompletabilnosti. Kao primere takvih rezultata on navodi sopstvene teoreme o nepotpunosti. Tako druga teorema o nepotpunosti

> "Čini nemogućim da neko konstruiše izvestan dobro definisan sistem aksioma i pravila zaključivanja i da na konzistentan način o njemu tvrdi sledeće: *Opažam (sa matematičkom izvesnošću) da su sve ove aksiome, kao i pravila zaključivanja, valjane i verujem da one sadrže čitavu matematiku*. Ako neko tvrdi tako nešto, on protivreči sebi. Jer ukoliko opaža da su aksiome o kojima je reč valjane, on takođe opaža (sa istim stepenom izvesnosti) da su one konzistentne. Dakle on poseduje matematički uvid koji nije posledica njegovih aksioma."[17]

Na osnovu ovoga, Gedel pravi podelu na objektivnu i subjektivnu matematiku. Objektivna matematika predstavlja sistem svih istinitih matematičkih tvrđenja, dok subjektivnu matematiku čini sistem svih dokazivih matematičkih tvrđenja. Nijedan dobro definisan aksiomatski sistem ne može da sadrži čitavu objektivnu matematiku, jer je tvrđenje koje kaže da je sam ovaj sistem konzistentan istinito a ipak, prema drugoj teoremi o nepotpunosti, nedokazivo u ovom aksiomatskom sistemu. Sledećom, po Gedelu neizbežnom, dilemom, možemo sumirati prethodno rečeno:

16 K. Gödel, "The present situation in the foundations of mathematics" (1933), in: *Kurt Gödel Collected Works*, *Volume III*, Unpublished essays and lectures, ed. by S. Feferman, J. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons, R. Solovay, Oxford University Press, 1995, str. 50.

17 K. Gödel, "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications" (1951), in: *Kurt Gödel Collected Works*, *Volume III*, Unpublished essays and lectures, ed. by S. Feferman, J. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons, R. Solovay, Oxford, Oxford University Press, 1995, str. 309.

> "Ili je matematika nekompletabilna u smislu da se njene aksiome nikada ne mogu uhvatiti putem konačnog pravila, što će reći da ljudski duh (čak i unutar ravni čiste matematike) neograničeno prevazilazi moći ma koje konačne mašine, ili pak postoje apsolutno nerešivi diofantovski problemi navedene vrste... "[18]

Upravo je drugi disjunkt ove dileme, u kom se jasno ocrtava jaz između objektivne i subjektivne matematike, onaj koji je relevantan za razumevanje Gedelovog platonizma. Njega Gedel smatra protivargumentom gledištu da matematika nije ništa više od ljudske kreacije. Naime, ukoliko smo mi sami tvorci matematike, onda bi znali sve o njoj, jer tvorac mora znati sve o sopstvenoj kreaciji. Šta više, čak i kada bi se tvrdilo da mogu postojati činjenice o matematici koje ne znamo, realističko stanovište se i dalje nameće. Primera radi, mi zaista konstruišemo stvari kakve su mašine, čije ponašanje ne možemo u potpunosti predvideti. Upravo stoga što se mašine konstruišu iz nekog datog materijala, odgovarajuća situacija u matematici bi i dalje povlačila neku vrstu realizma, jer bi i dalje postojala objektivna osnova naše konstrukcije. Gedel smatra da to povlači "da matematički objekti i činjenice (ili bar *nešto* u njima) postoje objektivno i nezavisno od naših mentalnih akata i odluka"[19].

Do sada je platonizam bio posledica jednog od dva disjunkta dileme koju smo naveli. Kasnije u predavanju Gedel tvrdi da argumenti za platonizam, koji on naziva i pojmovnim realizmom, imaju kao podršku određene rezultate iz osnova matematike, nezavisno od toga koji dusjunkt dileme zaista važi. Reč je o tri argumenta usmerena protiv ideje da je matematika ljudska ili slobodna kreacija.

Na prvom mestu, kao što je rečeno, ukoliko bi matematika bila ljudska kreacija, mi sami ne bi bili lišeni znanja o predmetu koji smo stvorili, bar ne u toj meri u kojoj to zaista jesmo. Kao drugo, matematičku praksu odlikuje nizak stepen slobode, samim tim što matematičari nisu u stanju da pukom snagom sopstvene volje dokazuju važenje svojih teorema. I na kraju, izgleda da dokazi tvrđenja o izvesnoj klasi objekata zahtevaju upotrebu objekata druge klase. Primera radi, Gedel ističe da izvesni dokazi tvrđenja o prirodnim brojevima zahtevaju upotrebu skupova prirodnih brojeva, pa je i pojam skupa prirodnih brojeva nužan u ovom kontekstu. Ali prirodni brojevi i skupovi prirodnih brojeva nisu iste stvari i kreacija objekata prve vrste ne čini nužnom kreaciju objekata druge. To znači da ukoliko želimo da utvrdimo svojstva stvari koje smo kreirali moramo, ujedno, da kreiramo objekte druge vrste koji će nam u tome pomoći.

Parsons s pravom ističe da ovi pozitivni argumenti za platonizam uopšte ne pretpostavljaju pojam intuicije koja se u Gedelovom radu o Kantorovom problemu

18 ibid, str. 310.

19 ibid, str. 311.

kontinuuma činila centralnom. U pomenutom *Gibs predavanju* postoji mesto koje donekle reiterira teme iz upravo pomenutog rada, ali koje je ovoga puta formulisano pomoću jezika pojmova pre nego li samih skupova. Tako Gedel kritikuje zamisao prema kojoj se za

> "Značenje termina (tj. pojmova na koje referiraju) tvrdi da predstavlja nešto stvoreno od strane čoveka, a što se prosto sastoji iz semantičkih konvencija. Verujem da istina leži u tome da ovi pojmovi poseduju objektivnu stvarnost po sebi, koju ne možemo stvoriti ili izmeniti, već samo opaziti i opisati"[20]

U najmanju ruku ovo nas navodi da preispitamo stav da je Gedelov pojam intuicije zaista toliko uzak koliko se činilo. Ovo, ujedno, baca novo svetlo na Gedelove opaske iz 1964 godine. Parsons razmatra naredni odeljak, u kom nalazi materijal za nešto istančaniju interpretaciju od uobičajene:

> "Ali, uprkos njihovoj udaljenosti od čulnog iskustva, ipak posedujemo nešto nalik opažaju objekata teorije skupova, o čemu svedoči činjenica da nam se aksiome nameću kao istinite. Ne vidim nikakav razlog zbog koga bismo imali manje poverenja u ovu vrstu opažaja, tj. u matematičku intuiciju, nego u čulno opažanje koje nam omogućava da gradimo fizičke teorije i da očekujemo da će se naši budući čulni opažaji sa njima slagati, kao i da verujemo da pitanje koje je trenutno neodlučivo nije bez značenja i da može biti odlučeno u budućnosti. "[21]

Parsons ističe da Gedelovo zastupanje pojmovnog realizma, pored "uobičajenog" matematičkog realizma, po svemu sudeći utiče na to koji su to objekti teorije skupova koje opažamo. Pod objektima teorije skupova treba razumeti ne samo same skupove, već i skupovno-teorijske pojmove kakvi su, primera radi, pojmovi skupa, pripadnosti i tome slično.[22] Povrh toga, čini se da intuicije koje imamo o samim skupovima zauzimaju manje centralno mesto u Gedelovom objašnjenju problema matematičkog znanja od intuicija koje imamo o skupovno-teorijskim pojmovima.

Gedel napominje da "matematička intuicija ne mora biti shvaćena kao sposobnost koja daje *neposredno* znanje o objektima. Pre će biti slučaj da, kao i u fizičkom iskustvu, mi *formiramo* naše ideje o tim objektima na osnovu nečeg drugog što *jeste* neposredno dato".[23] Ovo bi trebalo da ide u prilog tezi da su neki od naših apstraktnih matematičkih pojmova primitivni, te da na osnovu njih zasnivamo naše znanje o ostalim matematičkim objektima. Ovi pojmovi su neophodni da bismo

20 ibid, str. 320.

21 K. Gödel, "What is Cantor`s continuum problem?", str. 268.

22 C. Parsons, "Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel`s though", str. 65.

23 K. Gödel, "What is Cantor`s continuum problem?", p. 268.

imali ideje o matematičkim objektima i, kao takvi, zasnivaju ostatak našeg matematičkog znanja.

Čak i ukoliko bi se ispostavilo da matematički objekti ne postoje, Gedel sugeriše da i dalje možemo pružiti smislen odgovor na pitanja kakvo je hipoteza kontinuuma, i to upravo na osnovu ovih intuicija, budući da

> "Pitanje objektivnog postojanja objekata matematičke intuicije [...] nije presudno za problem koji trenutno razmatramo. Prosta psihološka činjenica postojanja intuicije, koja je dovoljno jasna da proizvede aksiome teorije skupova, kao i neograničen niz njihovih proširenja, dovoljna je da pruži smisao pitanju o istinitosti tvrđenja kakvo je Kantorova hipoteza kontinuuma."[24]

Gedelovo razlikovanje između objektivne i subjektivne matematike nam ovde može biti od pomoći. U subjektivnom smislu, ono što određuje istinu u domenu skupova jesu upravo aksiome teorije skupova koje prihvatamo, kao i njihova moguća proširenja. Sa druge strane, ono što određuje aksiome teorije skupova, kao i njihova proširenja, jesu naše matematičke intuicije primitivnih pojmova. Gedel veruje da se mogu navesti jaki argumenti u prilog tvrdnji da zaista postoji takvo nešto kao što je objektivna matematika koja je u potpunosti nezavisna od subjektivne matematike. Upravo to nameće platonizam kao poziciju, onako kako je određena u *Gibs predavanju*.

Na ovom mestu možemo istaći dva aspekta dosadašnje analize platonizma i intuicije u Gedelovom radu. Prvi je da Gedel iznosi argumente za platonizam koji su nezavisni od njegovih ideja o prirodi matematičke intuicije. Postoje mesta, kako smo videli, na kojima Gedel vidi platonizam, uprkos svim njegovim nedostacima, kao jedinu održivu poziciju. Uvođenje sposobnosti matematičke intuicije, kao dodatne komponente u argumentaciji, možemo videti kao nešto što dolazi nakon prihvatanja samog platonizma a u cilju objašnjenja onoga za šta već znamo da je istinito. Drugi aspekt se ogleda u tome što se matematička intuicija ne odnosi samo na skupove već i na primitivne skupovno-teorijske pojmove. Upravo su ovi pojmovi ono što, u mnogo većoj meri od skupova samih, stvara aksiome koje, sa svoje strane, određuju ono što je dokazivo u teoriji skupova.[25]

Ukoliko se usredsredimo samo na način na koji stičemo znanje o skupovima, izgubićemo iz vida Gedelova gledišta o skupovno-teorijskoj praksi, kao i načinu na koji je ona povezana sa njegovim platonizmom. To, međutim, nije sve. Ovim rizikujemo da propustimo i onaj aspekt koji možemo naći unutar Gedelovog progra-

24 ibid, str. 268.

25 Mora se, međutim, priznati da tumačenje kakvo je Parsonsovo nailazi na određene teškoće. Čini se da Gedelove argumente odlikuje rebusnost pre nego suptilnost, te da ovakvo podvajanje sfere matematičkih objekata na skupove i pojmove dodatno komplikuje inače upadljivo jasne Gedelove argumente. Da li se, i u kom smislu, može govoriti o ovoj vrsti podele kod Gedela pitanje je koje zaslužuje dublju analizu od one koje je ponuđena u ovom radu.

ma formulisanja novih aksioma teorije skupova. Hipotezu kontinuuma možemo posmatrati ne samo kao pitanje *šta* određuje matematičku istinu, već i pitanje *kako* dolazimo do novih aksioma i verovanja u njih.

Kako za platonistu aksiome daju samo nepotpun opis univerzuma skupova, mora se postaviti pitanje kakve su to aksiome koje bi nam mogle dati potpun opis tog univerzuma. To onda prerasta u problem opravdanosti verovanja u takve aksiome. Jedno objašnjenje koje Gedel pruža oslanja se na sposobnost matematičke intuicije. Međutim, ovo *nije jedino* objašnjenje koje on nudi. Pored ovog, po Gedelovom mišljenju, nove aksiome mogu se opravdati svojim posledicama u drugim granama matematike, kao što je, primera radi, aritmetika.[26] Ovaj deo Gedelove filozofske pozicije, međutim, prevazilazi okvire ovog rada.

Miloš Adžić
Filozofski fakultet, Beograd

Miloš Adžić

Ontological and Epistemological Dimensions of Gödel's Platonism

(Summary)

Kurt Gödel is certainly one of the biggest names of logic and mathematics of the last century. Besides that, he is also the most famous proponent of mathematical Platonism. The aim of this work is to investigate different aspects of Gödel's Platonism as well as arguments he put forward in its support. We shall see that despite the problems Platonism faces, there is a lot to cite that promotes it as the only viable position in the philosophy of mathematics.

KEY WORDS: Kurt Gödel, mathematical platonism, set theory, continuum hypo- thesis, independence.

26 K. Gödel, "What is Cantor`s continuum problem?", str. 261.