

## РАЗВОЈ МАТЕМАТИЧКОГ МИШЉЕЊА КОД УЧЕНИКА КАО АСПЕКТ ПРОЦЕСА ИНТЕЛЕКТУАЛНОГ ВАСПИТАЊА<sup>1</sup>

**Апстракт** *Један од значајних аспеката интелектуалног васпитања јесте развој математичког мишљења код ученика. Овај општи тип мишљења развија се у настави математике кроз развијање посебних типова математичког мишљења, као што су алгебарско, аритметичко, просторно и геометријско мишљење. Односи се на развијање система математичких операција код ученика које изражавају мисаоно математичко виђење објективне стварности, на основу којег индивидуа објективну стварност посматра и њој приступа са математичке тачке гледишта. Садржаји наставе математике представљају основу развоја различитих операција математичког мишљења. Структурирани математички задаци и њихово решавање, индивидуално и кроз друге облике рада, омогућавају постепено овладавање различитим операцијама математичког мишљења, као и њихово даље развијање, међусобно повезивање и слично. То се посебно односи на садржаје проблемски оријентисане наставе, где се математичко мишљење код ученика развија на микроплану као процес савладавања когнитивних препрека и остварења открића решења проблемских ситуација. Значајну улогу у процесу развоја математичког мишљења код ученика има педагошко вођење од стране наставника, које треба да омогући оптимални развој операција мишљења у овој области.*

**Кључне речи:** *интелектуално васпитање, математичко мишљење, настава математике, проблемски оријентисана настава, педагошко вођење.*

## THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL THINKING OF STUDENTS AS AN ASPECT OF THE PROCESS OF INTELLECTUAL EDUCATION

**Abstract** *One of important aspects of intellectual education is the development of mathematical thinking of students. This general type of thinking can be developed during math classes by developing specific types of mathematical thinking, such as algebraic, arithmetic, spatial and geometric thinking. It is about the development of the system of mathematical opera-*

<sup>1</sup> Чланак представља резултат рада на пројекту „Модели проценивања и стратегије унапређивања квалитета образовања у Србији”, бр. 179060 (2011–2014), који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

tions in students which express ideational mathematical view of objective reality, based on which the student observes objective reality and approaches it from the mathematical point of view. The contents of mathematics teaching are the basis for the development of various operations of mathematical thinking. Structured mathematical tasks and their solving, both individually and in other forms of work, enable gradual acquisition of different operations of mathematical thinking, their further development, interconnecting and so on. This relates especially to the contents of problem-solving orientation in teaching, where students develop mathematical thinking on a micro plan by overcoming cognitive obstacles and discovering the solution of a problem situation. Pedagogical guidance by the teacher plays an important role in the process of the development of mathematical thinking of students and it should enable optimal development of thinking operations in this area.

**Keywords:** intellectual education, mathematical thinking, mathematics teaching, problem solving orientation in teaching, pedagogic guidance.

## РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ У УЧЕНИКОВ КАК АСПЕКТ ПРОЦЕССА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ВОСПИТАНИЯ

**Резюме** Одним из важных аспектов интеллектуального воспитания является развитие математического мышления у учащихся. Этот общий тип мышления формируется в процессе обучения математике, путем развития особых форм математического мышления, таких как алгебраическое, арифметическое, пространственное и геометрическое мышления. Относится к развитию системы математических операций у учеников, выражающих мыслительное математическое представление объективной реальности, в соответствии с которым индивидум смотрит на объективную реальность и подходит к ней с математической точки зрения. Содержание обучения по математике представляют собой основу для развития различных операций математического мышления. Структурированные математические упражнения, самостоятельное или совместное решение этих упражнений, обеспечивают постепенное овладение различными операциями математического мышления и позволяют его дальнейшее развитие. Особенно это относится к содержаниям проблемно-ориентированного обучения, где математическое мышление учащихся формируется на микро уровне как процесс преодоления когнитивных препятствий и достижения решения проблемных ситуаций. Важная роль в процессе развития математического мышления у учащихся отводится педагогическому руководству преподавателя, которое должно обеспечить оптимальное развитие математического мышления.

**Ключевые слова:** интеллектуальное воспитание, математическое мышление, преподавание математики, проблемно-ориентированное обучение.

## Увод

Један од значајних задатака наставе математике у школи јесте и развој математичког начина мишљења код ученика. Остварење овог задатка предвиђено је у оквиру реализације програмских садржаја наставе овог предмета на свим нивоима његове реализације, дакле у свим разредима основне и средње школе. Оно што представља једну од основа остварења овог задатка наставе математике јесте природа математике као научне области. У математици постоји целовит и логички доследан систем знања и појмова, у оквиру којег се јавља обухватан и постојан склоп различитих веза и односа, који постоје између различитих математичких знања и појмова, као и између различитих области математике. Ове везе и односи представљају по својом логичкој природи нешто знатно дубље и постојаније у односу на ниво и квалитет повезаности појмова, закона, правила и других облика знања који постоје у оквиру других научних области и научних дисциплина (Antonijević, 2006; Devlin, 2012). На основу тога, сви сегменти знања и појмова у оквиру математике међусобно су вишеструко повезани и условљени, односно између њих се успоставља сложен систем ваза и односа међузависности. Повезаност знања и појмова у систем у области математике представља узорни модел система знања и појмова (закона, правила, аксиома, теорема, формула, операција, једначина, поступака и других релевантних облика математичких знања). Остварењу таквог једног модела система знања непосредно се или посредно тежи и у оквиру других научних области и научних дисциплина. То је и један од основних сегмената процеса математизације који је заступљен у оквиру појединих научних области и научних дисциплина. На основу тога, и настава математике неопходно је да буде оријентисана у правцу развоја система математичких знања и појмова код ученика, а упоредо и развоја математичког мишљења. Усвајање и овладавање системом математичких знања и појмова постаје незаменљиви сегмент савременог институционализованог образовања сваке индивидуе, и овај процес се остварује на свим нивоима општег образовања, као и у различитим областима стручног образовања на средњошколском и високошколском нивоу.

### **Суштинска својства процеса развоја математичког мишљења код ученика**

Да би се дубље и обухватније одредила суштина појма „математичко мишљење“, неопходно је поћи од одговора на нека од кључних питања у овој области. Шта је математичко мишљење? Које су основне карактеристике овог типа мишљења уопште? По чему се математичко мишљење издваја у односу на друге типове мишљења? Поред тога, значајан и низ питања усмерених на разјашњавање природе математичког мишљења код ученика и процеса његовог развоја и унапређивања. Одговори на ова питања треба да омогуће потпуније разумевање

улоге развоја математичког мишљења у оквиру ширег процеса интелектуалног развоја и васпитања.

У циљу постизања дубљег разумевања природе математичког мишљења и његовог развоја код ученика, неопходно је обратити пажњу на нека од одређења феномена мишљења у логици, дакле мишљења као логичке категорије. У уџбенику логике (Šešić, 1983: 77) мишљење се одређује као „субјективно стваралачко схватање објективне материјалне стварности, природне, друштвене, биолошке и психичко-мисаоне“. Ова дефиниција мишљења није искључиво логичка, већ логичко-психолошка дефиниција, с обзиром на то да се истиче аспект субјективног у сазнавању објективне стварности. Уопште, мишљење има свој логички и психолошки аспект, који се јављају и у области математичког мишљења. У оквиру психологије, процес увиђања односа и стваралачко мишљење не анализира се само и искључиво као поступак закључивања како се он сагледава у оквиру логике, већ управо као процес који се одвија одређеним током, условљен когнитивним својствима субјекта који је мисаоно активан у неком смислу, процес који има своју унутрашњу динамику и који се одвија кроз одређене фазе. Код Шешића је наглашено и да се суштина мишљења састоји у следећем (1983:77): (1) у разликовању као основној психичкој функцији којом се откривају различите стране предмета, (2) у схватању односа између тих разних страна предмета, (3) у психичкој функцији поређења сличних или различитих особина предмета и (4) у сједињавању различитог у јединствено. У овом случају нагласак је стављен на аналитичко-синтетичку природу склопа мисаоних операција и њихову логичку природу и функцију, као и на узајамност и реципроцитет аналитичког и синтетичког аспекта мисаоне делатности.

У различитим одређењима појма „математичко мишљење“ наводе се различити типови мишљења које у одређеном смислу обухвата и математичко мишљење. На пример, Маричић (2006: 192) наглашава да се садржај овог појма односи на *тип мишљења* (апстрактно, конкретно, интуитивно, функционално, дијалектичко, стваралачко и други), на *стил мишљења* (гипкост, активност, усмереност, критичност, оригиналност и други), на *метод сазнавања* (посматрање, дедукција, индукција, аналогија, моделовање) и на *својство личности* (тачност, концизност, концентracија, склоност стваралаштву). Математичко мишљење представља обухватни тип мишљења који се јавља као систем међусобно повезаних операција мишљења. Овај систем није само скуп математичких операција, већ интегрисана повезана целина у којој математичка знања и појмови представљају оруђе мисаоних активности индивидуе. Поред тога, јавља се чврста повезаност математичког мишљења и логике, односно логичког аспекта мишљења у целини (Devlin, 2012). Ова врста повезаности јавља се на основу природе математике као области науке, природе знања и појмова које чине саставни део система научних знања у оквиру математичке науке.

Математичко мишљење састоји се од посебних типова мишљења који се развијају у посебним областима наставе математике, те се тако може говорити о алгебарском, аритметичком, просторном, геометријском, као и о другим типовима

мишљења у овој области. Указује се и на природну повезаност која постоји између ових типова мишљења, као на пример код Ворена и Купера (Warren & Cooper, 2009), који говоре о постојању природне повезаности између аритметичког и алгебарског мишљења код ученика, што се односи и на процесе њиховог развоја.

Развијање математичког мишљења у настави математике остварује се и као део ширег процеса развоја *математичког приступа објективној стварности*, а све то упоредо чини и сегмент целине процеса интелектуалног васпитања које се остварује у настави математике као једној од кључних области наставе за реализацију процеса интелектуалног васпитања у школи. Под математичким приступом објективној стварности подразумева се присуство различитих облика интеракције с објективном стварношћу који укључују развијене капацитете математичког мишљења, знања и појмове, који се јављају као средства сазнавања и разумевања појединих сегмената свега оног што за индивидуу у објективној стварности представља предмет математичког поимања. ...

Један од имплицитних задатака наставе математике, према Цветковићу (1981), неопходно је да чини оспособљавање ученика да на свет гледају са *математичке тачке гледишта*. Остварени развој у овој области чинио би ослонац њихове основне оријентације у објективној стварности, а представља и основу повезивања математичких знања и појмова. Да би се код ученика развио капацитет да ствари посматра са математичке тачке гледишта, неопходно је да развије систем операција математичког мишљења, као кључно средство оваквог приступа објективној стварности. У овом случају уочљиво је да се појам „математичке тачке гледишта“ у знатној мери поклапа са појмом „математичко виђење објективне стварности“, тако да се може одредити и на тај начин. И један и други појам односе се на неопходност развоја математичког мишљења код ученика. Наглашава се да је од кључног значаја за развој математичког мишљења код ученика избор полазних знања и појмова, карактер и распоред међусобних веза које се између њих у настави откривају, као и успех у разумевању и овладавању тим знањима и појмовима. Подразумева се да усвајајући кључне математичке појмове ученици упоредо треба да овладају и математичким начином мишљења и основним поступцима математичке делатности, тако да усвојени појмови треба да постану средство математичког мишљења (Cvetković, 1981: 69-70). Стога, кључну улогу за формирање система математичких знања има усвајање правих математичких појмова који по природи својих међусобних веза и односа омогућавају формирање логички доследног система знања код ученика у овој области. Управо откривање тих унутрашњих веза и односа које се јављају код математичких појмова, а који изражавају те исте везе и односе у објективној стварности, представља кључно средство развијања система математичких знања код ученика. Цветковић ставља нагласак и на однос међузависности који се успоставља између процеса развоја математичких појмова и развоја математичког мишљења код ученика, у смислу да се ова два процеса међусобно подстичу и допуњавају (налазе се у сложеном односу комплементар-

ности), те се у одређеном смислу могу посматрати као део јединственог процеса развоја математичког мишљења у настави математике.

Математичко мишљење представља *облик теоријског мишљења*, односно јавља се као облик теоријског, мисаоног и појмовног односа према објективној стварности. Међутим, као и свака друга врста мишљења индивидуе, математичко мишљење има и свој аспект примене, односно јавља се и као *примењено (апликативно) математичко мишљење*. Управо своју пуну вредност математичко мишљење има у примени, кроз различите активности индивидуе у објективној стварности које су засноване на развијеном систему операција математичког мишљења код индивидуе. Примена математичког мишљења непосредно се јавља у свакој специфичној ситуацији решавања проблема који захтева примену различитих математичких знања и појмова. То је свака ситуација у којој је индивидуа у прилици да искористи сав расположиви капацитет који поседује у области математичког мишљења у циљу решавања неког конкретног проблема (проблемске ситуације) са којим се суочава. Због тога се применљивост (апликативност) *математичког мишљења* јавља као једно од његових значајних својстава. У том погледу Гуд и Брофи истичу значај подучавања ученика разумевању и високом нивоу примене математичких знања, стављајући нагласак на развијање *математичког потенцијала* (power) код ученика, који се односи на њихове способности да истражују, интуитивно закључују, размишљају логички, као и да ефикасно користе различите математичке моделе за решавање посебних, нерутинских проблема (Good & Brophy, 1991: 456). Математички потенцијал се у овом смислу односи на развијени капацитет математичког мишљења код ученика. Према овим ауторима, математика укључује различите методе, као што су методе истраживања и резонувања, укључује средства комуникације и логичку повезаност која се успоставља између математичких знања и појмова. У оваквом схватању истиче се да је за развој математичког потенцијала код сваке индивидуе неопходан развој способности математичког мишљења.

У настави математике, упоредо са процесом развоја система математичких знања и појмова, одвија се и процес развоја математичког мишљења код ученика. Ова два процеса су неодвојиво двосмерно и вишеструко повезана и условљена. Ови процеси се одвијају упоредо, а основу њиховог одвијања чине *садржаји наставе математике*, изабрани на сваком нивоу образовања и наставе математике, у складу са постављеним општим циљевима и задацима васпитања и образовања, са посебним циљевима и задацима математичког образовања и наставе математике, као и у складу с очекиваним исходима реализације наставе математике на свим посебним узрастима ученика. На основу повезаности ова два развојна процеса подразумева се да процес учења у настави математике потенцијално може истовремено да обухвата сегмент усвајања знања и појмова и развој мисаоних операција карактеристичних за математичко мишљење (Karut, 2008). Када се ова повезаност између развојних процеса и оствари у настави математике и не остане само на нивоу потенцијалних могућности, тада се практично омогућава да мате-

матичко знање и математичко мишљење представљају две развојне димензије процеса откривања предмета математике као науке (Antonijević, 2006: 103).

Процес развоја математичког мишљења код ученика има основу у употреби система математичких знања и појмова који се код ученика формира упоредо са развојем математичког мишљења. Код више аутора (на пример, Svetković, 1981; Devlin, 2012; Omond, 2012) наглашава се да математичко мишљење функционише као *оперисање математичким знањима* (појмовима, правилима, формулама, поступцима и слично). У свакој ситуацији решавања математичког задатка ученик је у непосредно у прилици да користи све оно што поседује као когнитивни капацитет у овој области, у сазнајном смислу и смислу разумевања, а што је неопходно да би дошао до решења задатка. Употреба претходно усвојених знања и појмова (оперисање знањима и појмовима) служи као средство упознавања задатка, сагледавања целине контекста задатка, уочавања различитих веза и односа који су део задатка, структуралног и функционалног разлагања задатка на мање делове, тражења начина којим би се дошло до решења задатка, као и других активности које се јављају у процесу решавања задатка. Поред претходно усвојених знања и појмова који чине нужну основу примене операција математичког мишљења у процесу решавања задатка, значајна је и могућност коришћења претходно стечених искустава (McDaniel & Schlager, 1990; Omond, 2012) која су настала при решавању задатака који су слични актуелном задатку. Та искуства се односе на упражњавање различитих активности у процесу решавања задатка и потенцијално омогућавају да се у случају сваког наредног задатка на ефикаснији и бржи начин дође до решења задатка. И у случају коришћења различитих елемената претходног искуства, математичко мишљење има непосредну улогу оперисања са тим искуством ради решавања задатка.

Различите операције математичког мишљења развијају се превасходно у настави математике. Тај развој не одвија се спонтано и стихијски, већ извире из целине организације наставе математике, у оквиру које се одвијају различите активности наставника и ученика, усмерене на остварење свих предвиђених задатака наставе математике, као и предвиђених исхода у овој области рада у настави. У начелу, јављају се и ситуације у којима ученик у настави потпуно самостално, без вођења наставника и без помоћи других ученика, решава математичке задатке који могу допринети унапређивању већ развијених мисаоних операција, које се јављају као референтне за израду одређене врсте математичких задатака у настави. И на овај начин се потенцијално може јавити одређени уплив на развој операција математичког мишљења код ученика. Међутим, за суштински утицај на развој математичког мишљења код ученика значајно је вођење које остварује наставник у наставном процесу (National council of teachers of mathematics, 2000), које се одвија кроз различите заједничке активности наставника и ученика. У том погледу, кључне су управо активности вођења које се одвијају у проблемски оријентисаној настави математике, с обзиром на чињеницу да у оваквом моделу рада у настави велики значај има добра организација свих активности, у циљу остварења што вишег нивоа ефикасности наставе.

Вођење које остварује наставник у процесу развоја математичког мишљења ученика суштински је *педагошко вођење*. Оно има свој пуни смисао у целини организације активности наставника и ученика, а усмерено је на остваривање постављених задатака наставе математике у целини, па самим тим и оних задатака наставе математике који су значајни за развој математичког мишљења ученика.

Вођење од стране наставника има функцију да интензивира и оптимизује утицај на развој математичког мишљења код ученика, на основу упражњавања различитих мисаоних активности у процесу наставе математике. Оно је значајно управо због чињенице да се овај утицај не може одвијати на оптималном нивоу, само на основу спонтаних активности ученика, кроз самостално решавање различитих математичких задатака (проблемских и других задатака). Остварује се на различите начине, кроз различите активности наставника у процесу наставе. Неке од тих активности су следеће: (1) *индивидуализовано испостављање захтева ученицима*, у погледу испостављања различитих захтева и задавања математичких задатака које ученици решавају, са циљем да се омогући да се код ученика створи оптимални когнитивни изазов при решавању постављених задатака; (2) *праћење оствареног напретка* у процесу решавања постављеног задатка, уз давање адекватних подстицаја у ситуацијама када је напредак из одређених разлога успорен или уопште не постоји; (3) *пружање помоћи*, кроз савет, сугестију, давањем додатног објашњења, усмеравањем активности ученика и слично, да би се интензивирало упражњавање појединих мисаоних активности које имају кључни значај за развој математичког мишљења код ученика; (4) *указивање на погрешне кораке* и грешке било које врсте у процесу решавања задатка, у циљу интензивирања развоја когнитивних способности и вештина; (5) *формативно процењивање* (оцењивање), као облик вредновања у којем до изражаја долази и мотивациона вредност процењивања постигнућа; као и друге активности које су део целине педагошког вођења у процесу наставе. Смисао ових активности, између осталог, јесте и да се искористи скуп активности ученика у настави математике као средство развоја математичког мишљења код ученика.

### **Мисаоне активности у проблемски оријентисаној настави математике**

Проблемски оријентисана настава математике потенцијално може бити добра потпора за развој различитих елемената математичког мишљења код ученика. У том погледу, јављају се одређене предности овог модела рада у настави математике у односу на друге моделе и начине рада. То омогућавају кључни елементи активности у проблемским ситуацијама, оних активности које су карактеристичне за процесе решавања проблема.

Уопште, у оквиру проучавања проблема мишљења прихвата се полазно становиште да се мишљење непосредно испољава у било којој проблемској ситуацији. Да би се дошло до решења постављеног проблема који је смештен



у одређену проблемску ситуацију, мишљење се јавља као средство доласка до решења постављеног проблема. У области математике, проблемска ситуација се успоставља на основу поставке *математичког проблемског задатка*, који се може конституисати као текстуални проблемски задатак или у неком другом облику. Сваки сложенији математички задатак може у настави математике за одређене ученике бити у функцији проблемског задатка (Antonijević, 2006; 2007) уколико ће код тих ученика бити у функцији иницирања различитих мисаоних операција, улагања адекватног мисаоног напора, и тада је све то оријентисано ка доласку до траженог решења постављеног задатка.

Постоји схватање да „мислити значи откривати“ (McDaniel & Schlager, 1990), а то је применљиво и на откривање различитих математичких форми уз помоћ математичког мишљења, што потенцијално може да се одвија у проблемски оријентисаној настави математике. Мишљење у овом смислу испољава се као нека врста конструкције на мисаоном плану идеализованог математичког модела нечега што је део објективне стварности (предмета, појаве, процеса, својства и слично). Мислити значи у складу са неким замишљеним планом и шемом активности трансформисати почетни облик предмета рада у неки наредни облик, што треба да омогући откривање нечега новог. У случају решавања математичког проблемског задатка, та трансформација може да поприми низ различитих мисаоних и практичних облика, у зависности од сложености постављеног задатка, облика који треба да воде до открића решења постављеног проблема. Трансформације које се одвијају у процесу решавања проблемског задатка служе као потпора за разлагање проблема на мање целине и делове, у циљу његовог дубљег разумевања. Могу да се одвијају на практичном плану, кроз конструисање различитих шема и скица, на говорном плану, на мисаоном плану, или комбинацијом елемената из ова три плана. Одвијају се на мање или више ефикасан начин, у зависности од нивоа и квалитета развијености математичког мишљења код индивидуе уопште, али и облика математичког мишљења који су значајни за референтну област математике (аритметика, алгебра, геометрија и друге области).

Активности мишљења представљају средство доласка до решења било ког проблема са којим се индивидуа суочава. То подразумева да је за решење математичке проблемске ситуације неопходно савладати когнитивну препреку која се јавља као део контекста проблемске ситуације. Да бисмо усмерили пажњу на суштину когнитивне препреке у математичкој проблемској ситуацији, неопходно је да обратимо пажњу на то шта уопште представља когнитивна препрека у проблемској ситуацији? У суочавању индивидуе са проблемском ситуацијом, као когнитивна препрека јавља се нови, непознати и неоткривени део контекста ситуације, који је неопходно решити (савладати, упознати, открити, разумети и слично), што би требало да значи да је препрека као таква савладана. Сходно томе, когнитивна препрека у математичком задатку може се одредити као дидактички (методички) осмишљена препрека, за чије савладавање је неопходно да ученик уложи мисаони напор (Antonijević i Mitrović, 2013). То је део задатка који

је непознат ученику и мисаони напор који треба да уложи усмерен је у правцу доласка до решења задатка, тако да оно што је било непознато и неразумљиво постаје познато и разумљиво. Различити елементи непознатог и неразумљивог у математичком проблемском задатку могу постојати код различитих ученика, што је случај и са непроблемским задацима. Омонд (2012: 17) истиче да се у задацима који имају улогу да се код ученика оствари прелаз у разумевању аритметичке и алгебарске суштине задатка код појединих ученика јавља и проблем нераздевања (*misconception*) функције знака једнакости у задатку, док за већину ученика то значење није проблем. Дакле, код ових ученика је та врста нераздевања део непознатог у оквиру когнитивне препреке.

Шта значи *савладати когнитивну препреку* у процесу решавања математичког задатка? То може да има различита значења, као што као процес може да се одвија на различите начине. Једно од значења јесте да ученик предузимањем одређених когнитивних активности ново и непознато учини познатим, односно оно што је неразумљиво или недовољно разумљиво учинити разумљивим, схваћеним (Antoniјевић i Mitrović, 2013).

Форма и садржај математичког задатка представљају основну поставку задатка која има функцију да омогући ученику разумевање постављеног захтева у задатку, који треба да омогући упражњавање одговарајућих мисаоних активности усмерених у правцу доласка до решења. Због тога је нужно да се кроз поставку задатка наводе одређени елементи на основу којих ученик треба да концептуализује на мисаоном плану захтев који му се задатком испоставља. Постављени захтев који ученик треба да испуни решавањем задатка односи се на део који у задатку није описан или је једним делом описан. Тај део задатка који тек треба бити испуњен представља изостављени део задатка, и тај део је *спољашња садржајна когнитивна препрека*, дакле она врста препреке која је део поставке математичког задатка. Та когнитивна препрека у математичком задатку за ученика представља недостајући део задатка, нешто ново, мање или више непознато, чијим овладавањем се одвија испуњење обавезе постављене захтевом у задатку. Испуњавањем захтева, односно решавањем задатка, изостављени део задатка постаје решење задатка, непознато бива учињено познатим и разумљивим, на који начин постављена когнитивна препрека у математичком задатку бива савладана.

При решавању проблемског задатка неопходно је да буду предузете и мисаоне активности усмерене на *откривање* и издвајање нових, у датом задатку претходно скривених односа, који се јављају као кључна основа која треба да доведе до решења задатка. Стога, мисаоне активности открића решења постављеног проблема, што је истовремено и процес савладавања когнитивне препреке, представљају кључни сегмент мисаоних активности у проблемски оријентисаној настави математике. Открити ново у проблемској ситуацији може имати више различитих значења. У сваком опцији откривања новог, то ново се јавља као потпуно решење постављеног проблема, или као елемент решења (један од корака ка решењу), који заједно са више других различитих елемената чини целину ре-

шења проблема. Као један од аспеката открића решења проблема често се јавља и *откриће начина доласка до решења* (McDaniel & Schlager, 1990), што је посебно изражено у математичким проблемским задацима. Тако се откриће начина решавања проблема јавља као значајна фаза која претходи доласку до откривања коначног решења, а у самој поставци проблемског задатка откриће начина решења је предвиђено да се одвија као значајна фаза у процесу решавања проблемског задатка. Упражњавање ових мисаоних активности представља средство развоја математичког мишљења код ученика.

У проблемски оријентисаној настави математике, при решавању проблемских задатака, самостално или на друге начине (групни рад, рад у пару, кооперативно учење), упражњавају се различите мисаоне активности које доприносе развоју математичког мишљења код ученика. Неке до тих активности су следеће: (1) упознавање, сагледавање и разумевање контекста проблемске ситуације која се јавља као део проблемског задатка; (2) упоређивање контекста дате проблемске ситуације са другим контекстима, као и откривање и издвајање сличности и разлика; (3) рашчлањавање контекста проблемске ситуације на издвојене делове; (4) откривање веза и односа који се јављају између делова контекста проблемске ситуације; (5) откривање суштине проблема који је постављен као део контекста проблемске ситуације, односно део проблемског задатка; (6) разумевање суштине когнитивне препреке која се јавља при суочавању са проблемском ситуацијом; (7) активирање претходних искустава у решавању сличних и различитих других проблемских задатака; (8) осмишљавање стратегије (начина, поступка и слично) решавања проблемског задатка; (9) примена усвојене стратегије решавања проблемског задатка; (10) преобликовање почетне поставке проблемског задатка у облик који омогућава остварење открића решења постављеног проблема; (11) откриће решења постављеног проблема; (12) провера исправности решења проблемског задатка. Из овог прегледа различитих мисаоних операција које се јављају при решавању математичких проблемских задатака уочљиво је да се издвајају неке од њих као посебно карактеристичне. То су мисаоне операције анализе (рашчлањавања), *упоређивања, закључивања и откривања*.

Неке од ових активности јављају се и при решавању математичких задатака уопште, али су они највише заступљени управо у проблемски оријентисаној настави математике. Ове активности не јављају се увек и искључиво према наведеном редоследу, већ су могуће и ситуације скоковитог напретка у процесу решавања проблемског задатка (McCain, 2004), што значи да неке од наведених активности могу и изостати у појединим случајевима. Постоје разлике у погледу обима и дубине интензитета ових мисаоних активности код проблемских задатака различитих нивоа сложености. Између осталог, те разлике се највише уочавају при решавању рутинских проблемских задатака и нерутинских проблемских задатака, где се код ових других очекује заступљеност открића новог које је ширег обима него што је то случај при решавању рутинских проблемских задатака (Antoniјевић, 2008). Посебно интензивне мисаоне активности ученика јављају се код већине математичких не-

рутинских проблемских задатака текстуалног типа, где су активности мишљења у првој фази решавања задатка усмерене преваходно на конституисање (откриће) поставке задатка, што представља фазу у којој се текстуални формат задатка трансформише у неки облик математичког формата.

### Закључак

Настава математике представља једну од кључних области наставе у школи у оквиру које се одвија значајан сегмент процеса интелектуалног васпитања, као области васпитања у којој се остварује систематски утицај на интелектуални развој ученика, развој њихових когнитивних способности и вештина, развој математичког мишљења, развој математичког и научног погледа на свет и друго. Из тих разлога се развој математичког мишљења код ученика јавља као један од најзначајнијих сегмената интелектуалног васпитања. То је значајно и на основу чињенице да развој когнитивних капацитета у овој области представља средство сваке индивидуе за ефикасније сналажење у било којој ситуацији (у контексту професионалне делатности или у свакодневном животу), где се очекује ефикасно решавање проблема са којима се суочава, и то проблема било које врсте, при чијем решавању је значајно коришћење система математичких знања којим индивидуа располаже. Све то има непосредни или посредни значај за неопходност остварења одређеног квалитета математичког образовања који је неопходно постићи у систему васпитања и образовања, као једног од чиниоца који суштински одређује ниво квалитета образовања уопште.

### Литература

- Antonijević, R. (2006). *Sistem znanja u nastavi*. Beograd: Institut za pedagoška istraživanja.
- Antonijević, R. (2006). Mathematics Achievement of Serbian Eighth Grade Students and Characteristics of Mathematics Curriculum. *Zbornik Instituta za pedagoška istraživanja*, God. 38, Br. 1, 225-246.
- Antonijević, R. (2007). Differences in Teaching and Learning Mathematics in Relation to Students' Mathematics Achievement In TIMSS 2003. *The Second IEA Research Conference: Proceedings of the IRC-2006 – Volume One* (pp. 269-281). Amsterdam: IEA.
- Antonijević, R. (2008). Intelektualno vaspitanje u problemskoj nastavi. U Š. Alibabić i A. Pejatović: *Образовање и учење претпоставке европских интеграција* (str. 23-34). Beograd: Institut za pedagogiju i andragogiju Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu.
- Antonijević, R. i Mitrović, M. (2013). Nivo i kvalitet aktivnosti u procesu intelektualnog vaspitanja. *Nastava i vaspitanje*, God. 62, Br. 3, 465-478.
- Cvetković, Ž. (1981). Neka novija shvatanja o usvajanju matematičkih pojmova u osnovnoj školi. *Nastava i vaspitanje*, God. 40, Br. 1, 69-79.
- Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. Palo Alto, CA: Keith Devlin.

- Good, T. L. & Brophy, J. E. (1991). *Looking in Classrooms*. New York: Harper Collins.
- Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Thinking? In J. Kaput, D. Caraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Maričić, S. (2006). Složenost i kompleksnost matematičkog mišljenja, *Zbornik radova Učiteljskog fakulteta u Užicu*, Univerziteta u Kragujevcu, Br. 7, 191-200.
- McDaniel, M.A. & Schlager, M.S. (1990). Discovery Learning and Transfer of Problem-Solving Skills. *Cognition & Instruction*, Vol. 7, No. 2, 129-159.
- McCain, T. D. E. (2004). *Teaching for Tomorrow: Teaching Content and Problem-Solving Skills*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- National council of teachers of mathematics (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National council of teachers of mathematics.
- Omond, Ch. (2012). Developing „Algebraic Thinking“: Two Key Ways to Establish Some Early Algebraic Ideas in Primary Classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom*, Vol. 17, No. 4, 13-21.
- Šešić, B. (1983). *Osnovi logike*. Beograd: Naučna knjiga.
- Warren, E. & Cooper, T. (2009). Developing Mathematics Understanding and Abstraction: The Case of Equivalence in the Elementary Years. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 21, No. 2, 76–95.

### Подаци о аутору

**Др Радован Антонијевић** (1964) је ванредни професор на Одељењу за педагогију и андрагогију Филозофског факултета Универзитета у Београду.