

КАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОЦЕСА РЕШАВАЊА МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА¹

Радован Антонијевић²

Одељење за педагогију и андрагогију,
Филозофски факултет Универзитета у Београду, Србија

Апстракт У процесу наставае математике подстиче се развој коиницивнoј кайаццишеиша ученика, шако да настава математике представља кључну област наставае за одвијање процеса интелектуалној васпишања у школи. У овом раду разматрају се неке од кључних карактеристика шој процеса. Централно место заузима разматрање улоје сложенoј феномена који је означен као „коиницивна прејрека“, феномена који се јавља у постојуцима решавања математичких проблемских задатака. Сваки проблемски задатак у настави математике обично се осмишљава на шај начин да садржи оно што је у задатку шражено да би се дошло до ошкрића решења. На основу шоја, ствара се код ученика на мисаоном плану коиницивна прејрека, као и коиницивни изазов одређеној нивоа иншеницишеиша. У процесу „савладавања коиницивне прејреке“ у решавању некој проблемској задатку у настави математике неoшходно је да ученик уложи одређени ниво коиницивнoј найора и да оштимално аниажује референцини део коиницивнoј кайаццишеиша који поседује. Процес решавања задатка одвија се кроз различите мисаоне активности (мисаоне операције), кориситећи прешходна знања и искуства неoшходна за ефикасно решавање одређених група проблемских задатака. Систем коиницивних прејрека шреба да представља саставни део реализације наставнoј програма математике, како би се омоућило иницирање мисаоних активности ученика на оштималном нивоу и развој различитих математичких коиницивних микросструктура (способности, вештине, знање), развој кайаццишеиша математичкој мишљења ученика, као и развој коиницивнoј кайаццишеиша ученика у целини.

Кључне речи: математички задатак, коиницивна прејрека, коиницивни изазов, коиницивни найор, развојна штрансформација.

1 Рад је настао у оквиру пројекта „Модели процењивања и стратегије унапређивања квалитета образовања у Србији“ (број 179060, 2011-2018) Института за педагогију и андрагогију Филозофског факултета у Београду, који финансира Министарство просвете и науке Републике Србије.

2 aa_radovan@yahoo.com

Увод

Све опште когнитивне структуре код ученика (способности, вештине, знања, искуства), као један од кључних чинилаца развоја и учења, укључују покретање одговарајућих мисаоних активности (мисаоних операција) код ученика. У случају математике, решавање математичких задатака служи као основа за иницирање и укључивање различитих мисаоних активности, које по својој природи припадају и области математичког мишљења. Различите мисаоне операције користе се у решавању математичких проблемских задатака и разумевању математичких садржаја, а посебан значај имају мисаоне операције које се јављају као део концептуалног схватања и разумевања поступака (Swanson & Williams, 2014). Те активности омогућавају развој и унапређивање различитих математичких когнитивних структура. Ове специфичне структуре функционишу на основу упражњавања операција математичког мишљења и могу бити означене као когнитивне микроструктуре. Оне представљају специфичне способности, вештине, знање и искуства у оперисању са различитим математичким структурама, као што су мере, алгебарске структуре (групе, поља итд.), топологије, метричке структуре (геометрија), односи еквиваленције и други. На пример, одређене когнитивне математичке микроструктуре су следеће: способност рада са алгебарским структурама, вештина рада са топологијама, познавање рада са мерама и искуство рада са низовима и остало.

Као кључни чинилац утицаја на развој когнитивних микроструктура код ученика, настава математике може се посматрати као организовани систем математичких садржаја и задатака који омогућавају стварање и савладавање различитих когнитивних препрека (Antonijević, 2016). Тако успостављен конструкт служи као основа за генерисање одговарајућег објашњења сложене улоге когнитивне препреке у решавању било ког математичког задатка, а поготову оних задатака који су проблемски по свом карактеру. Улога когнитивних препрека у процесу учења које се одвија у настави математике може се сагледати и анализирати у овом контексту.

Улога когнитивних активности ученика у настави математике може се објаснити кроз анализу специфичности које се јављају кроз механизам елементарног *доприноса* одређене активности развоју појединих когнитивних микроструктура код ученика. Тај допринос се постиже у свакој ситуацији решавања математичких проблемских задатака кроз коју се остварује виши ниво мисаоне активности ученика. За боље разумевање тог доприноса неопходно је растумачити коју врсту утицаја одређена когнитивна активност ученика има на развој одређених когнитивних микроструктура. Да би се овај механизам утицаја потпуније разумео, неопходно је обухватно сагледати суштинску улогу и значај когнитивне препреке у настави и учењу математике.

Феномен когнитивне препреке у процесу решавања проблемског задатка

У било ком математичком проблемском задатку постоји структура у којој се појављује скуп датих (постављених) елемената, и тај део структуре представља оно што је познато у контексту задатка. Истовремено, постоје захтеви које треба испунити, то

је оно што се тражи у задатку, или оно што је унапред непознато или неразумљиво у контексту задатка, до чега се може стићи решавањем задатка. Појмови *нејознај* и *представљање нејознај* у задатку помињу се у студији Ванга и сарадника (Wang et al., 2018), где се однос између познатог и непознатог дела задатка одређује као сложеност задатака. Ако познати део задатка има шири опсег од непознатог (постоје више познатих елемената у задатку од непознатих), онда је то задатак нижег нивоа сложености (лак задатак) и обратно. Термин *нејознај* у овом смислу није исти као непозната величина у алгебри (нпр. x и y као непознате у једначини), те се ове категорије не могу поистовећивати. Код било ког математичког проблемског задатка, однос између познатих и непознатих делова задатка варира од ученика до ученика, а то је узроковано индивидуалним когнитивним капацитетом ученика који долази до изражаја у суочавању са задатком.

Када ученик започне решавање математичког проблемског задатка, ствара се мисаони репрезент математичке структуре тог задатка. На тај начин ствара се и когнитивна препрека на мисаоном плану, као когнитивни феномен који изражава баријеру на прелазу између познатог и непознатог дела у задатку, односно датих и задатих елемената у контексту задатка (Antoniјевић, 2011). Према томе, савладавање когнитивне препреке у процесу решавања задатка је нека врста моста ка оном што је ново, непознато, неразумљиво, као превазилажење општег или ситуационог дефицита (празнине, недостатка или слабости) у функционисању одређених когнитивних микро-структура које учествују у решавању задатка (способност, вештина, знање, искуство). Постоје различите ситуације када ученик нешто *не разуме* у неком математичком садржају или задатку. На пример, Ормонд (Ormond, 2012) наводи да се појављује слабост у разумевању природе разломака као проблем у решавању различитих алгебарских задатака, и напомиње да је то део ширег контекста алгебарског разумевања. Разумевање је когнитивни капацитет који се односи на различите аспекте задатка и његово решавање, као што су: текст задатка, поставка задатка, поступци у решавању задатка, различити елементи у задатку, однос између датих елемената и захтеване трансформације која треба да се уради и тако даље. То су потенцијалне тачке за појаву когнитивне препреке, тако да се може јавити једна или више когнитивних препрека у решавању неког математичког проблемског задатка.

Ситуација у настави математике када ученик који решава математички проблемски задатак има тешкоћу да нешто разуме и открије може се решити на више начина, а сам начин решавања зависи од оствареног нивоа разумевања структуре и садржаја у неком конкретном случају решавања задатка (Antoniјевић, 2016; Swanson & Williams, 2014). У неким случајевима тешкоћа се може превазићи самосталним напором и откривањем елемената који су кључни за унапређење нивоа разумевања. У другим случајевима ученик не може самостално учинити напредак у решавању задатка, већ само уз помоћ наставника или другог ученика. Наставник може помоћи ученику на различите начине, као што су сугестија, додатно објашњење, давање сличног задатка и на друге начине.

Више аутора разматра појмове који се односе на учениково разумевање математичких садржаја, као што су *разумевање* (understanding), *појрешно разумевање*

(misunderstanding), *тешкоћа у разумевању* (difficulty in understanding), *негосиџаџак разумевања* (lack of understanding), *коџниџивни конфликџи* (cognitive conflict) и други. Ови појмови користе за описивање карактеристика функционисања мишљења када се појави феномен који се дефинише као когнитивна препрека, иако ови аутори не користе појам когнитивна препрека. На пример, Ормонд (Ormond, 2012) користи термин *џоџрешно разумевање*, наглашавајући да се појављује у ситуацији решавања алгебарских задатака у нижим разредима основне школе, што се у случају употребе знака једнакости јавља као *џоџрешно разумевање значења знака једнакости*. Сахин и сарадници (Sahin, Yemez, & Erbas, 2015) разматрају потешкоће које се јављају при решавању задатака из извода једначина (средњошколска настава математике), које се означавају као *тешкоће у разумевању*. У разматрању одређених тешкоћа које се јављају у разумевању математичких садржаја, Шахрил (Shahrill, 2013) користи појам *џоџрешно разумевање* (incorrect understanding). Концепт *коџниџивноџ сукоба* користе и Пелид и Сузан (Peled & Suzan, 2011), описујући ситуацију када се појављује тешкоћа у решавању математичких задатака. Хизарчи и сарадници (Hizarci, Ilgun, & Kucuk, 2014) користе појам *еџисџетемолошка џреџрека* (epistemological obstacle), коју дефинишу као неку врсту тешкоће у разумевању одређених математичких садржаја. Алкок и сарадници (Alcock, Ansari, & Batchelor, 2016) говоре о *коџниџивним џреџрекама* као о потешкоћама које се појављују у решавању појединих категорија математичких задатака.

Различите врсте когнитивних препрека појављују се у настави математике при суочавању ученика с одређеним садржајима и решавању одређених проблемских задатака. Неке од тих когнитивних препрека представљају ситуације са тренутним неразумевањем односа који постоје у математичким задацима. Тејг и Бејкер (Tague & Baker, 2014) описују природу когнитивне препреке онакве каква се она реално појављује при решавању различитих проблемских ситуација у којима се јавља проблем разумевања одређеног дела садржаја проблемске ситуације.

Када се створи когнитивна препрека, иницирају се мисаоне активности усмерене на њено савладавање. У случају решавања проблемског задатка, то су мисаоне активности у контексту дате проблемске ситуације, као што су: идентификација и анализа елемената структуре задатака, откривање односа који постоје између елемената, испробавање могућности за извођење различитих трансформација, тражење поступка који води до решења и друге (Bernardo, 1999; Paas, Renkl, & Sweller, 2010). Све ове мисаоне активности предузимају се да би се открио недостајући кључни елемент (један или више њих). Стога је когнитивна препрека која се појављује при решавању неког проблемског задатка увек повезана с потребом да се код ученика оствари нека врста открића у процесу решавања оваквих задатака.

Свака ситуација у којој се ученик суочава с математичким садржајем који садржи познате и непознате делове представља потенцијално ситуацију у којој се може јавити нека врста когнитивне препреке. То је ситуација у којој је неопходно открити непознати део на основу датог и познатог дела задатка, односно у којој је мисаоном активношћу неопходно допрети до непознатог у задатку. То се дешава са било којом врстом математичког садржаја који ученик не разуме и у којем му је нешто ново и непознато. Свонсон и Вилијамс (Swanson & Williams, 2014) истичу да се прелаз од

познатог ка непознатом дешава и у ситуацији када ученик треба да учини одређени апстрактни садржај математички конкретним, у смислу схватања особина које тај садржај изражава.

Прилагођавање тежине задатка и когнитивни изазов

Актуелни когнитивни капацитет ученика чини основу за решавање било ког наредног математичког проблемског задатка. При задавању нових задатака, неопходно је да се тежина задатка индивидуализује и прилагоди том капацитету, полазећи од чињенице да се ученици истог узраста (разреда) знатно разликују по карактеристикама капацитета за решавање математичких задатака одређеног нивоа тежине. Овај капацитет укључује одређене опште и специфичне когнитивне способности и вештине, претходно знање, искуство решавања различитих врста математичких задатака, развијена интересовања и мотивацију у области математике и друго. Способности, вештине, знање и искуства организовани су у поменутиим општим когнитивним структурама и математичким когнитивним микроструктурама. Актуелни когнитивни капацитет обухвата когнитивне структуре које су већ развијене (развијен когнитивни потенцијал) и когнитивне структуре које су још увек у фази интензивног развоја (непотпуно развијен когнитивни потенцијал).

Актуелни когнитивни капацитет се разликује од ученика до ученика, па је неопходно појединачно или кроз категорије ученика прилагођавати тежину математичких проблемских задатака који им се задају. То је неопходно због тога што когнитивне препреке које се јављају при решавању једног те истог задатка нису истог нивоа тежине за све ученике. Стога, ниво тежине математичких задатака које ученик решава треба прилагодити општим и специфичним когнитивним микроструктурама које поседује. На основу тога, ученик може да реши задатке који су на оптималном нивоу когнитивних захтева (Årlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013). Неопходно је на адекватан начин, избором задатака, успоставити однос између нивоа тежине задатка и нивоа тежине когнитивне препреке (на пример, нивои непознатог и неразумљивог у садржају когнитивне препреке) и актуелног когнитивног капацитета ученика. Због тога је позиција когнитивне препреке у односу на актуелни когнитивни капацитет ученика у одређеној области значајна за ефикасно решавање математичког задатка, на основу потребе да ученик упражњавањем мисаоних активности развија своје когнитивне микроструктуре.

Математички проблемски задаци у одређеној мери испуњавају своју улогу уколико омогућавају унапређивање одређених когнитивних микроструктура код ученика, оних које нису у потпуности развијене, активирањем одговарајућих мисаоних активности. За сваку когнитивну микроструктуру која се развија код ученика постоји област оптималног развоја, а то је подручје непотпуно развијеног когнитивног потенцијала. То значи да је у развојном смислу оправдано да ученик упражњава различите мисаоне операције у математици, које представљају начине функционисања непотпуно развијених когнитивних микроструктура (способности, вештине, знање и искуства). Таква улога припада задацима који захтевају виши ниво математичког мишљења (Årlebäck et al., 2013; Czocher, Tague, & Baker, 2013). То произилази из логике унутрашњих особина

процеса когнитивног развоја и подразумева прихватање става да се на развој когнитивног капацитета код ученика може систематски утицати организованом наставом и учењем (Swanson & Williams, 2014), што је становиште које се исходишно јавља у оквиру теорије интелектуалног развоја Л. С. Виготског. У процесу интелектуалног васпитања које се одвија у настави математике, утицај на развој одређене математичке когнитивне микроструктуре остварује се у случају када се створена когнитивна препрека позиционира у тачки њеног оптималног развоја, кроз математичке задатке који то треба да обезбеде у настави.

Од чега зависи оптимални ниво тежине когнитивне препреке за ученика у процесу решавања математичког задатка? Постоји више различитих чинилаца који одређују ову врсту оптимизације и координације у процесу овладавања математичким садржајима. Подразумева се да решавање математичког задатка одређене тежине изискује скуп структурираних мисаоних активности (поступака, операција) који су интегрални део процеса решавања задатка. Приликом задавања математичких задатака наставник треба управо да води рачуна о томе да их задаје на начин који аутентично ангажује ученика у процесу математичког мишљења (Otten, 2010), односно у складу са карактеристикама учениковог когнитивног капацитета. Међутим, поставља се питање како наставник може бити сигуран да ли је ученик *ауџентично* ангажован у решавању задатка? Због тога је потребно да се задавање задатака одређеног нивоа тежине заснива на наставниковој процени учениковог актуелног когнитивног капацитета за решавање задатака (Antonijević, 2011). Ако наставник не учини квалитетну процену и додели тежи задатак ученику који се не може решити самосталним активношћу ученика, такав задатак се онда евентуално може решавати уз наставникову помоћ или кроз заједничку активност са другим учеником (на пример, кроз рад у пару). Када је реч о узрасту ученика, исти математички задатак није подједнако *шежак* за све ученике. Када је математички задатак оптималног нивоа тежине за просечног ученика, истовремено је *лак* за напредне ученике и *шежак* за слабије ученике. Стога, однос између тежине математичког задатка и актуелног когнитивног капацитета ученика одређује да ли ће тај задатак омогућити стварање когнитивне препреке оптималног нивоа тежине за ученика.

Када ученици заједно решавају проблемске математичке задатке (рад у пару, рад у групи), може се очекивати да тада поседују виши ниво заједничког когнитивног капацитета и стога могу решавати и сложеније задатке него што би могли појединачно. У таквим опцијама решавања задатака колаборативно учење реализује се кроз различите видове интеракције (Francisco, 2013), што доприноси потпунијем разумевању садржаја којим ученици овладавају. Ови капацитети постају међусобно комплементарни у ситуацијама решавања математичких задатака кроз активности кооперативног учења, што омогућава виши ниво когнитивног напора.

Когнитивна препрека као део процеса решавања задатка у настави математике препрека је у правом смислу речи и у ситуацији када она ствара неку врсту когнитивног изазова код ученика. Стога, когнитивна препрека треба да послужи и као средство стварања когнитивног изазова и да омогући да се код ученика покрене низ мисаоних активности које ће довести до решења задатка. Које су карактеристике феномена који

се може означити као *когнитивни изазов*? Нема сумње да је ово значајан психолошки феномен за реализацију било које врсте активности индивидуе, а сигурно и за решавање математичких проблемских задатака. Ситуација когнитивног изазова може се евентуално створити новим задатком у настави математике, задатком са којим се ученик претходно није сусрео. Уопште, у настави математике очекивање новог и непознатог потенцијално може да представља неку врсту когнитивног изазова, бар за одређену категорију ученика, који се јавља као резултат природне радозналости везане за унутрашњу когнитивну потребу да се *непознато упозна* и *неразумљиво учини разумљивим*. Оваква унутрашња когнитивна потреба за упознавањем новог и непознатог која изворно постоји код сваке индивидуе представља једну од основа и за стварање ситуације когнитивног изазова у настави математике.

Да би савладао когнитивну препреку, ученик треба да учини адекватан когнитивни напор у поступку решавања задатка. Когнитивни напор може се одредити као ниво ангажовања који се манифестује кроз скуп различитих мисаоних операција у циљу савладавања когнитивне препреке. Поједини аутори (Årlebäck et al., 2013; Bernardo, 1999; Paas et al., 2010) указују на чињеницу да постоје математички задаци са захтевима нижег и захтевима вишег нивоа. Сходно томе, ови задаци изискују различите приступе ученика и различите нивое когнитивног напора. У случају задатака са вишим нивоом захтева очекује се да ученик упражњава мисаоне активности на појмовном нивоу. Когнитивни напор који је учињен зависи од односа који се успоставља између следећег: (1) карактеристике сложености и тежине задатка, и (2) карактеристике референтног дела актуелног когнитивног капацитета ученика. Овај однос је специфичан и разликује се од ученика до ученика. Подешавање нивоа когнитивне препреке значи да одређена когнитивна препрека може оптимално да функционише у поступку решавања математичког задатка у којем ученик користећи сва своја расположива когнитивна средства (способности, вештине, знање, искуства и друго) решава постављени задатак, постижући оптимални ниво когнитивног напора (Paas et al., 2010). Стога, задатак који ученик решава у настави математике не би требало да буде ни сувише тежак ни превише лак. Оптимални ниво когнитивног напора зависи од више чинилаца, као што су ниво разумевања или неразумевања делова и елемената задатог садржаја, ниво претходног знања у вези са решавањем такве врсте задатака, карактеристике примењеног организационог облика за решавање задатака (појединачно, кооперативно), присуство помоћи споља (наставника или другог ученика) и друго. Нема сумње да је продуктивнија опција решавања математичких проблемских задатка у којој је неопходно да ученик постигне што је могуће виши ниво когнитивног напора.

Унапређивање когнитивних микроструктура

Као резултат процеса савладавања когнитивне препреке, појављује се прогресивна промена одређене когнитивне микроструктуре код ученика, тј. њен развој и унапређење. Коришћење различитих мисаоних операција у ситуацијама када ученик настоји да реши постављени проблемски математички задатак потенцијално може резултирати истовремено унапређивањем једне или више когнитивних микроструктура

код ученика (способности, вештине, искуства учења). Основни услов за остварење ове узрочне везе јесте стварање когнитивне препреке код ученика која би имала оптимални ниво тежине (Bernardo, 1999). Таква когнитивна препрека иницира мисаоне активности ученика које значе активирање актуелног когнитивног капацитета и његов даљи развој.

Шта чини суштину унапређивања неке когнитивне микроструктуре? Кад год се јави ситуација успешног савладавања когнитивне препреке оптималног нивоа тежине у процесу учења, постиже се прогресивна промена претходног стања у процесу развоја когнитивне микроструктуре која је била активирана у циљу савладавања когнитивне препреке. Из претходног развојног стања микроструктуре, оно што се појавило као недостатак, некомплетност и слично барем делимично се отклања. На пример, када је у питању ниво разумевања неког математичког садржаја, то значи да успешно решење одређених типова математичких задатака може уклонити елементе онога што је непознато или недовољно схваћено у том садржају. Стога, когнитивна препрека оптималног нивоа тежине у настави математике несумњиво представља парадигму подесног средства за постизање прогресивних промена и унапређења у процесу развоја когнитивних микроструктура код ученика.

Прогресивна промена појединих когнитивних микроструктура која се јавља на основу савладавања когнитивне препреке може бити различита по својој природи, квалитету, нивоу и значају. Та промена зависи од више различитих чинилаца који се тичу актуелног когнитивног капацитета ученика, као и природе и основних карактеристика когнитивне препреке. У исто време, круцијални значај припада нивоу когнитивног напора који је остварен (Bernardo, 1999; Paas et al., 2010), а који је неопходан за успешно савладавање когнитивне препреке, од чега зависи и квалитет постигнутих прогресивних промена.

Да би се илустровао исход који се остварује активирањем одређених мисаоних операција за савладавање когнитивне препреке, описаћемо модел трансформације когнитивне микроструктуре, што ћемо симболично приказати као $A \rightarrow B$ (на основу A , следи B). Претпостављамо да се одређена когнитивна микроструктура код ученика прогресивно мења од стања A до стања B на основу решавања математичких проблемских задатака који омогућавају упражњавање различитих мисаоних операција на оптималном нивоу интензитета. Израз *стање* означава скуп елемената присутних у когнитивној микроструктури, у једној развојној тачки, а то стање евентуално се може унапредити решавањем проблемског математичког задатка. То је скуп елемената који се појављује у некој позицији развојне линије микроструктуре. Стање A , с одређеним карактеристикама, појављује се пре почетка решавања математичког задатка. Ако решавање неког проблемског задатка омогућава ученику да оствари интензивнији когнитивни напор, може се претпоставити да тај когнитивни напор ученика може довести до унапређења активираних когнитивних способности или вештина. То унапређење, уколико се догоди, доводи до конституисања новог стања B у развоју дате когнитивне микроструктуре, односно одвија се трансформација од A до B ($A \rightarrow B$).

У којим случајевима се ова врста унапређења когнитивне микроструктуре јавља? На пример, решавање математичких задатака у подручју множења разломака омогућава

ученику да унапреди различите елементе когнитивне микроструктуре која се може означити као *вештина множења разломака* и која је по својој природи математичка микроструктура. Неки од ових елемената подразумевају разумевање употребе множења у различитим случајевима и разумевање односа између различитих облика разломака као делова ове микроструктуре, које се могу јавити као специфичне микроструктуре. Сваким следећим задатком може се унапредити ниво ове две врсте разумевања ако ученику омогућава да оствари когнитивни напор нивоа који је виши од оног који је остварен у решавању претходног задатка.

Увек када се јави бар минимална промена у квалитету одређене математичке микроструктуре на основу решавања математичког проблемског задатка, можемо говорити о стварању новог стања Б у њеном развоју. Новоформирано стање Б је напредније стање у односу на стање А које му претходи. У новом стању Б јавља се бар минимални елемент квалитативно новог, заснованог на упражњавању мисаоних операција у решавању математичког задатка.

Описана трансформација у процесу наставе математике у суштини је елементарна промена која се одвија у одређеној когнитивној микроструктури код ученика. У неким случајевима може се десити као минимално унапређење, док се у неким другим случајевима дешава веће унапређење. У решавању математичких проблемских задатака може се одвијати истовремено унапређивање више различитих когнитивних микроструктура код ученика, зависно од сложености и тежина постављених задатака (Карут, 2008). Кључно је да се целина реализације наставног програма математике одвија уз такве елементарне прогресивне промене (унапређивања), које у суштини одређују, усмеравају и воде ток и природу читавог процеса когнитивног развоја ученика. У том случају се може очекивати да се интелектуално васпитање у настави математике одвија на високом нивоу ефикасности и ефективности.

Значај постигнутих прогресивних промена у развоју одређене когнитивне микроструктуре по моделу А→Б огледа се у различитим сегментима напретка у капацитету решавања математичких проблемских задатака у настави, као што су: (1) унапређење капацитета решавања нових задатака сличних нивоа тежине, са мањим когнитивним напором; (2) унапређење капацитета решавања нових задатака виших нивоа тежине, са сличним нивоом когнитивног напора. На основу остварених унапређења, учеников капацитет за решавање сложенијих задатака увећава се у одређеној мери у свакој од наведених ситуација.

Закључак

У процесу наставе математике суочавање ученика с одређеним проблемским задатком који треба решити, као и стварање когнитивне препреке, ствара ситуацију когнитивног изазова за ученика, а потом и одговарајући когнитивни напор неопходан за решавање задатка. То је оно што чини потпунијом улогу когнитивне препреке у настави математике. Такође, неопходно је да тежина математичких проблемских задатака и когнитивне препреке у процесу решавања ових задатака буду саображени актуелном когнитивном капацитету ученика (који поседује одређени ниво способно-

сти, вештина, знања, искуства у учењу и друго). У таквој ситуацији ученик је у прилици да упражњава одређене мисаоне активности усмерене ка успешном савладавању когнитивних препрека, активности које су саображене основним карактеристикама когнитивне препреке са којима се ученик суочава.

Свака когнитивна препрека у процесу наставе математике треба да има и одређену врсту улоге усмеравања ученика на коришћење адекватних мисаоних операција у процесу решавања математичког проблемског задатка. Стога, требало би да има улогу модела за покретање система мисаоних операција код ученика. С друге стране, тај систем операција код ученика представља средство за развој одређених когнитивних микроструктура.

Прогресивна промена у развоју неке когнитивне микроструктуре има продуктивни ефекат у односу на сваку следећу ситуацију решавања математичких проблемских задатака у настави. Очекује се да свако ново унапређење ове врсте ученику омогућава решавање сложенијих задатака, задатака вишег нивоа тежине, односно задатака који захтевају виши ниво когнитивног напора. На основу тога, у низу задатака који се решавају један за другим може се постићи постепено повећање нивоа тежине задатака, тако да сваки наредни задатак који ученик решава може у одређеној мери бити тежи у односу на претходни задатак. Оваква оријентација омогућава остварење продуктивног утицаја на развој одређених специфичних когнитивних микроструктура код ученика кроз процес наставе и учења математике. У ситуацији када се задатак решава кроз модел кооперативног учења, сваки следећи задатак може бити на вишем нивоу сложености и тежине у поређењу са ситуацијом када ученик решава задатак самостално.

Интелектуално васпитање које се недвосмислено одвија у процесу наставе и учења математике појављује се као комплексан процес деловања на когнитивни развој ученика. Као саставни део целине овог процеса, јавља се потреба за таквим наставним програмом који омогућава и подстиче решавање проблемских задатака, па самим тим и формирање организованог и систематичног низа когнитивних препрека, које служе као средство покретања комплексног скупа мисаоних активности ученика. То је начин да се кроз процес наставе и учења математике омогућује продуктивни утицај на развој и унапређење различитих когнитивних микроструктура код ученика, а самим тим и утицај на целину процеса когнитивног развоја, што представља један од суштинских задатака интелектуалног васпитања.

Литература

- Alcock, S., Ansari, D., & Batchelor, S. (2016). Challenges in mathematical cognition: A collaborative-derived research agenda. *Journal of Numerical Cognition*, 2(1), 20-41.
- Antoniјевић, R. (2011). Priroda когнитивне препреке у процесу интелектуалног васпитања. *Nastava i vaspitanje*, 60(4), 565-583.
- Antoniјевић, R. (2016). Cognitive activities in solving mathematical tasks: The role of a cognitive obstacle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(9), 2503-2515.
- Årlebäck, J. B., Doerr, H. M., & O'Neil, A. H. (2013). A modeling perspective of interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, 15, 314-336.

- Bernardo, A. B. (1999). Overcoming obstacles in understanding and solving word problems in mathematics. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 19(2), 149-163.
- Czocher, J. A., Tague, J., & Baker, G. (2013). Where does the calculus go? An investigation of how calculus ideas are used in later coursework. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 673-684.
- Francisco, J. M. (2013). Learning in collaborative settings: Students building on each other's ideas to promote their mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 417-438.
- Hizarci, S., Ilgun, S., & Kucuk, S. (2014). Epistemological obstacles in mathematical understanding: A function example. *International Journal of Academic Research Part A*, 6(5), 92-95.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic thinking? In J. Kaput, D. Caraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (5–18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Ormond, C. (2012). Developing “algebraic thinking”: two key ways to establish some early algebraic ideas in primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(4), 13-21.
- Otten, S. (2010). Conclusions within mathematical task enactments: A new phase of analysis. In P. Brosnan, D. B. Erchick & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (661-669). Columbus, OH: The Ohio State University.
- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2010). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational Psychologist*, 38(1), 1-4.
- Peled, I., & Suzan, A. (2011). Pedagogical, mathematical, and epistemological goals in designing cognitive conflict tasks for teacher education. *Mathematics Teacher Education*, 5(1), 73-87.
- Sahin, Z., Yemez, A. A., & Erbas, A. K. (2015). Relational understanding of the derivative concept through mathematical modeling: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(1), 177-188.
- Shahrill, M. (2013). Clustering of decimal misconceptions in primary and secondary classes. *International Journal of Humanities and Social Science*, 3(11), 58-65.
- Swanson, D., & Williams, J. (2014). Making abstract mathematics concrete in and out of school. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 193-209.
- Tague, J., & Baker, G. R. (2014). Flipping the classroom to address cognitive obstacles. In *121st ASEE Annual Conference and Exposition*. Indianapolis, IN, 15-18 June 2014.
- Wang, L., Zhang, D., Gao, L., Song, J., Guo, L., & Shen, H. T. (2018). MathDQN: Solving arithmetic word problems via deep reinforcement learning. In *The Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-18)* (5545-5552). New Orleans, LA, 2-7 February 2018.

Примљено: 24.11.2018.

Прихваћено за штампу: 05.12.2018.

CHARACTERISTICS OF THE PROCESS OF SOLVING MATHEMATICAL TASKS

Radovan Antonijević

Department of Pedagogy and Andragogy,
Faculty of Philosophy, University of Belgrade, Serbia

Abstract

In the process of mathematics education, the development of students' cognitive capacities is stimulated, and thus mathematics education is a key area in which the process of intellectual education in schools takes place. This paper looks at some of the key characteristics of this process, focusing in particular on the role of the complex phenomenon known as the cognitive barrier, which occurs in the process of mathematical problem tasks. In mathematics education, a problem task is typically designed so as to contain that which is required in order to work out the solution. A cognitive barrier thus arises in students' thought process, as does a cognitive challenge of a certain level of intensity. In the process of overcoming the cognitive barrier in working out the solution to a mathematical problem, students have to put in a certain amount of cognitive effort and optimally engage the referential part of their cognitive capacities. The process of problem solving takes place through different thinking activities (thinking operations), and draws on prior knowledge and experience necessary for the efficient solving of certain groups of math tasks. The system of cognitive barriers should be an integral part of the implementation of the mathematics curriculum, so as to enable the initiation of students' thought processes at the optimal level, and the development of various mathematical cognitive microstructures (abilities, skills, knowledge), the development of the capacity for mathematical thinking, and the development of students' overall cognitive capacities.

Keywords: *mathematical task, cognitive barrier, cognitive challenge, cognitive effort, developmental transformation.*

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМНЫХ ЗАДАНИЙ

Радован Антониевич

Кафедра педагогики и андрагогики,
Философский факультет, Белградский университет, Сербия

Резюме

В процессе обучения математике поощряется развитие познавательных способностей учащихся, поэтому преподавание математики является ключевой областью обучения в процессе интеллектуального развития. В данной статье рассматриваются некоторые из ключевых характеристик этого процесса. В центре внимания находится рассмотрение роли сложного явления, характеризующегося как «когнитивное препятствие», явления, возникающего в процессе решения математических проблемных заданий. Каждая проблемная задача в обучении математике обычно включает то, чего требуется в задаче, чтобы прийти к открытию решения. Исходя из этого, учащиеся создают когнитивные препятствия на уровне мышления, а также когнитивные вызовы определенного уровня интенсивности. В процессе «овладения когнитивным препятствием»

при решении проблемного задания в обучении математике ожидается от учащихся достижение определенного уровня когнитивных усилий и оптимального использования эталонной части своих когнитивных способностей. Процесс решения проблемной задачи происходит путем различных мыслительных действий (мыслительные операции), при этом используются уже приобретенные знания и опыт, необходимые для эффективного решения определенных групп задач. Система когнитивных препятствий должна стать неотъемлемой частью реализации учебной программы по математике, так как она инициирует мыслительную деятельность учащихся на оптимальном уровне и развивает различные математические когнитивные микроструктуры (способности, навыки, знания), расширяет объем математического мышления у учащихся и когнитивные способности в целом.

Ключевые слова: математическое задание, когнитивное препятствие, когнитивный вызов, когнитивное усилие, развивающая трансформация.