

Кратки
научни прилог

др Радован Антонијевић¹
Филозофски факултет, Београд



Различити присући у осмишљавању концепције сазнавања у настави математике²

Резиме: У раду се разматрају различити присући у осмишљавању концепције сазнавања у настави математике заснувани у теорији развијајуће наставе и у неким другим савременим теоријским оријентацијама. У оквиру теорије развијајуће наставе сматра се да кључну улогу у учењу и сазнавању у настави математике, које се односи на сазнавање предмета, појава и процеса објективног света, треба да има садржај наставе математике. Настава и процес сазнавања треба да буду осмишљени на такав начин да се ученицима омогући откривање унутрашње суштине предмета сазнавања, односно откривање њихове унутрашње математичке суштине. Настава заснована на овој концепцији сазнавања омогућава формирање стабилног система математичких знања и појмова, што треба да буде једна од основних карактеристика ефикасне наставе математике која води одређеном нивоу и квалитету постигнућа ученика. Поред тога, савремена схватања о улози учења и сазнавања у настави математике указују на чињеницу да важан задатак наставе математике треба да буде и формирање математичког начина мишљења код ученика.

Кључне речи: настава, учење и сазнавање, математика, систем математичких знања, математички начин мишљења.

Несумњиво је да математика као наставни предмет у школи заузима централно место и значај у оквиру наставног плана и програма основног, општег и стручног образовања. Математичка знања и појмови чине неопходну

основу успешног савладавања наставног градива и евентуалног формирања система знања и појмова у многим областима рада у настави, у оквиру појединих наставних предмета у основној школи и то, пре свега, у области наставних предмета као што су физика, техничко образовање и хемија. Између ових наставних предмета и математике постоји висок ниво повезаности садржаја наставе, односно постоје међупредметне корелације наставних садржаја, која се појављује као садржајна повезаност између

¹ radovan.antonijevic@f.bg.ac.rs

² Рад је настао у оквиру пројекта *Образовање и учење – ирешљивост европских интеграција* (број 149015), Института за педагогију и андрагогију Филозофског факултета у Београду, који финансира Министарство за науку и технолошки развој Републике Србије.

знања и појмова у оквиру садржаја наставе ових школских предмета. Уопште, настава математике има и шири значај од учења и сазнавања које се у њој одвија. Тај значај односи се на утицај који се остварује у правцу развоја личности сваког ученика, у интелектуалној, естетској и другим областима развоја.

С обзиром на неоспорни значај наставе математике за развој личности и образовање сваког појединца, у оквиру дидактике и методике наставе математике, све више се наглашава неопходност постављања стабилних основа математичког образовања још на нивоу млађих разреда основне школе, основа који би послужили за успешно овладавање математичким садржајима у старијим разредима основне школе, у средњој школи а и касније. При том, наглашава се да је неопходно да ученици већ у млађим разредима овладају *математичким приступом објективној стварности* и основним елементима математичког мишљења. О томе Цветковић (1981: 69) пише: „Она (математика) има да уведе ученике у специфичан, математички прилаз предметима, појавама и процесима, да им омогући успешно *откривање предмета математике*. Тај прилаз је за ученике нов и несвакидашњи. У настави, међутим, они њиме морају да овладају“. Усмереност наставе математике на откривање самог предмета математике, њених предметних основа, представља крупан задатак наставе математике, чијој реализацији морају бити подређени садржаји наставе математике. Реализација овог задатка у складу је са настојањем да се код ученика у настави развије *математички приступ стварности*, кроз развој различитих елемената математичког начина мишљења код ученика.

У савременој методици наставе математике наглашава се да један од кључних задатака наставе математике треба да представља *формирање система математичких знања и појмова* код ученика (на пример, Blanton, 2008; Windsor,

2010). Сматра се да би овај систем знања чинио стабилну основу усвајања знања у областима које су са математиком непосредно повезане, основу развоја укупног система знања и појмова, који би омогућио боље разумевање и усвајање нових научних знања од стране ученика у наставном процесу. Упоредо са развијањем једног оваквог система знања остваривао би се, као саставни део јединственог процеса, и ток развоја математичког мишљења ученика у настави, мада став о међусобном утицају и прожимању знања и мишљења није јасно постављен, нити су објашњени механизми ове врсте утицаја у настави математике. Из тих разлога, сложени однос између учења и сазнавања у настави математике и развоја математичког мишљења код ученика, представља значајно поље научног интересовања и истраживања у области методике наставе математике.

Учење и сазнавање у настави математике одвија се, како на основу општих психолошких и дидактичких принципа и поставки, тако и на основу специфичних својстава математике као области сазнања и методичких специфичности које се јављају у овој области васпитања и образовања. Полазиште за установљавање одређене концепције сазнања у овој области представљају два основна гносеолошка проблема, од чијег разрешења зависи општа оријентација у конституисању концепције сазнања. Та два гносеолошка проблема формулишу се са два једноставна питања, од чијих одговора зависе основне карактеристике концепције сазнања. То су: Шта је предмет сазнања? и Како се одвија сазнање? Ова два општа питања захтевају своју конкретизацију у оквиру концепције учења и сазнавања у настави математике.

Као и за наставу других наставних предмета, и за наставу математике се траже различити приступи, модели и поступци који ће наставу математике учинити што ефикаснијом и унапредити нивое постигнућа ученика у овој

области. Давидов сматра да је устројство наставе математике као целовитог наставног предмета веома сложен задатак, који захтева заједнички напор поред математичара и стручњака из других области, као што су педагози, психолози и логичари. Важан моменат решавања тог општег задатка представља издвајање у процесу конституисања наставног програма одређених математичких појмова, са којима је неопходно започети изучавање математике у школи. Ови појмови, сваки у оквиру своје предметне области, према Давидову (1966: 54–55), чине основу за устројство сваког наставног предмета и од ових изходних појмова у области математике, које ученици откривају и усвајају у настави, зависи општа оријентација у математичкој стварности, што има суштински утицај за касније напредовање у овој области знања. Општа оријентација у оквиру одређеног наставног предмета остварује се управо уз помоћ изходних појмова из референтне области, који представљају неопходно средство формирања система појмова у одређеној области сазнавања у настави. И у оквиру методике наставе математике прихвата се становиште о потреби да се општа оријентација у настави математике оствари путем усвајања кључних математичких појмова који представљају изходне појмове за математику као науку. Конституисање система кључних математичких појмова, који чине појмови и везе које се између њих успостављају и откривају, треба да чини основу ефикасног учења и сазнавања.

На значај присуства кључних математичких појмова у оквиру садржаја наставе математике указује и Давидов. Разматрајући проблем издвајања изходних математичких појмова и њихова суштинска својства, Давидов (1966: 58) наглашава да је *појам броја*, односно, *појам природног броја*, један од тих кључних, фундаменталних математичких појмова и да је овај појам то представљао кроз цео ток историје развоја математике као науке, као и то да овај појам игра суштинску улогу у свим областима производње,

технике и свакодневног живота људи. Давидов наглашава да избор почетних елемената изучавања математике у настави мора бити усклађен са значајем појма броја, чијим се откривањем и усвајањем у настави ученицима омогућава да истовремено откривају и суштинска својства количинских односа, као и друге математичке појмове. На основу наведених разлога, према Давидову, *рачунање* (сч т) и *број* представљају темељ каснијег усвајања математике у школи и основу упознавања других посебних и појединачних математичких појмова. Самим тим, представља и темељ формирања система математичких појмова код ученика и основу сваког даљег образовања, дакле не само математичког образовања.

Давидов наглашава да се системи бројева заснивају на *структури математичких појмова*, која представља основу система математичких појмова и операција. С друге стране, структура математичких појмова представља праву гносеолошку основу учења и сазнавања у настави математике. Појам броја повезан је са многим појмовима који му претходе, али је посебно повезан са појмовима „скуп“, „прсликавање“ (функција, операција), „еквивалентност“ и „обим“. На тај начин, сматра Давидов, број се у општој конструкцији савремених математичких појмова не јавља као почетни и основни појам, мада постоје и одређена схватања према којима је појам броја изходни математички појам у правом смислу те речи, на основу става да га није могуће непосредно дефинисати уз помоћ других појмова. Међутим, без обзира на постојање различитих ставова о томе да ли је појам броја првобитни математички појам или не, ови ставови не противрече фундаменталном значењу појма броја за целу математику, а самим тим и значају који формирање појма броја има у конституисању система математичких знања и упућивање ученика у саму природу математике. Из тих разлога, у оквиру математике важно је правилно утврдити и оценити конкретно место, улогу и повезаност овог математичког појма са дру-

гим појмовима у општем систему математичких појмова и операција, као и у оквиру математике као науке. Такође, за дидактику и методику наставе математике значајно је одредити место и улогу овог математичког појма у оквиру почетне наставе математике и значај који његово усвајање има за формирање целовитог система математичких појмова и развој основних елемената математичког мишљења код ученика.

Концепција сазнања у настави математике коју промовише теорија развијајуће наставе развијена је на основу резултата експерименталних истраживања у овој области. У оквиру дугогодишњих истраживања под руководством Ељконина и Давидова (1966; 1972; 1986), основу експерименталне наставе математике чинила је *концепција реалног броја*. За разлику од програма математике у традиционалној настави, био је предвиђен такав уводни део, у којем су ученици посебно изучавали генетски изходну основу каснијег извођења свих видова реалног броја, посебно изучавајући појам величине. Такав приступ проблему устројства експерименталног наставног предмета математике одредио је следећи систем његових основних наставних задатака, посебно састављених за примену у млађим разредима: (1) увођење ученика у сферу односа између величина и формирање апстрактног појма математичке величине код њих; (2) откривање од стране ученика односа дељивости величина као опште форме броја и формирање код њих апстрактног појма броја и разумевање основне узајамне повезаности међу његовим компонентама (број изведен из дељивог односа величина); (3) поступно увођење ученика у област различитих посебних видова бројева (у област природних, негативних бројева и разломака) и формирање код њих појмова о тим бројевима, као једног од појавних облика општег дељивог односа међу величинама при установљеним конкретним условима; (4) откривање од стране ученика једнозначности структуре математичке операције (ако је познато значење два елемента

операције, на основу њих је могуће једнозначно одредити значење трећег елемента) и формирање код њих разумевања узајамне везе елемената основних аритметичких операција (Давидов, 1986: 180).

Према основним схватањима у оквиру теорије развијајуће наставе, кључно средство сазнавања *учењем путем открића* чине наставни задаци, посебно припремљени у ту сврху. Овакав један систем наставних задатака у оквиру наставне делатности у настави математике, омогућава ученицима откривање унутрашњих, суштинских веза и односа које постоје између математичких појмова и математичких операција. Захваљујући основним својствима знања у оквиру математике као науке, која су повезана у чврст систем међусобно повезаних и условљених знања, ови наставни задаци омогућавају да се и код ученика формира систем знања. У тај систем знања укључена су знања и разумевања из области односа међу величинама и односа дељивости величина, као језгра око којег се формира систем откривених веза и односа, у области различитих појавних облика овог основног, изходног односа. Такође, односи између величина и њихово утврђивање чине основне елементе процеса сазнавања усмереног на формирање система знања. Учење путем открића у настави алгебре промовише и Јарбороу (Yarborough, 1999), указујући на важну улогу проблемских задатака у различитим областима у настави алгебре, чиме се значајно унапређују постигнућа ученика.

Приступ учења и сазнавања путем открића Давидов и сарадници конципирани су и у настави геометрије. Експерименталним проучавањима установљено је да је, избором адекватних садржаја наставе, неопходно омогућити ученицима откривање система унутрашњих веза и односа које постоје у оквиру појединих геометријских ликова и тела. Дакле, и у овој области постоји основна усмереност на формирање це-

ловитог система знања и појмова. Откривање и разумевање унутрашњих веза и односа у неком геометријском лику или фигури, посматраном као систем, прокрчује пут откривању и усвајању сложеног система веза и односа које постоје између различитих геометријских ликова и тела. На тај начин и знања из ове области код ученика постају део целовитог и логички доследног система знања. Разматрајући суштину поступка класификације у настави геометрије, Давидов се (1972: 23), између осталог, дотиче и проблема повезивања различитих појмова из области геометрије. О томе он пише на следећи начин: „Тако, при изучавању геометрије ученици установљавају везу између појмова *широуџао* и *неједнакостранични*, *једнакостранични* и *једнакократи* *широуџао* (према дужини страна), *ошироуџли*, *правоуџли* и *шуйоуџли* *широуџао* (према величини угла). Још више, један од централних задатака наставе састоји се у томе да се ученицима пренесу знања о *класификационим схемама*, које одражавају односе појмова у било којој области“. У овом случају, класификационе схеме представљају неку врсту општих образаца, модела, који омогућавају повезивање знања и појмова у јединствен систем знања, у одређеној области сазнања. Стога, један од задатака сазнавања у настави математике у целини јесте управо конституисање оваквих класификационих схема.

Посебно значајна улога сазнавања у настави математике односи се на *формирање математичког начина мишљења* код ученика. Један од имплицитних задатака наставе математике, према Цветковићу (1981) представља оспособљавање ученика да на свет гледају са математичке тачке гледишта, а у исто време овај задатак наставе математике представља и значајан услов њихове основне, опште оријентације у математичкој стварности, што само по себи представља и елемент повезивања математичких знања и појмова, с обзиром на чињеницу да се ради о општој оријентацији у математичкој стварности. Када су у питању путеви ре-

ализације овог крупног задатка наставе математике, наглашено је следеће: „Усвајајући појмове ученици треба да овладају и математичким начином мишљења, основним поступцима математичке делатности. Усвојени појмови, пак, треба да постану оруђе те делатности, средство математичког мишљења. Процес усвајања појмова је један од централних проблема у овој области наставног рада“ (Цветковић, 1981: 69–70). Кључну улогу за формирање система математичких знања према Цветковићу има усвајање правих математичких појмова који по природи својих међусобних веза и односа омогућавају формирање логички доследног система знања у овој области. С друге стране, овде се нагласак ставља и на међусобни однос зависности између развоја математичких појмова и развоја математичког мишљења, што је захтев који би било неопходно утемељити у садржаје наставе математике, с обзиром да савремена схватања односа између развоја појмова и развоја мишљења ученика указују на њихову тесну повезаност. Слична схватања заступа Блантон (2008: 97), истичући да настава математике која подржава развој алгебарског начина мишљења код ученика треба да омогући ученицима да истражују математичке односе, аргументују њихова својства и да формиране генерализације инкорпорирају у систем математичких знања.

Значајем развоја математичког мишљења бавио се и Првановић. Основу развоја система математичких појмова код ученика представља развој у настави математике типа мишљења који и он означава као *математичко мишљење*. Образлажући значај развоја и функцију математичког мишљења код ученика, између осталог, Првановић (1970: 14) наглашава следеће: „Најкраће али и најнепотпуније можемо рећи да се *математичким мишљењем изјашњавају математички појмови, ојершише математичким појмовима и ојкривају математичке релације и зависности међу математичким (ја и нематематичким) појмовима, шо јесш ојкривају се мате-*

математичке истине (чињенице)". По њему, један од најважнијих задатака наставе математике јесте да се ученици оспособе да математички мисле и да „знају“ које су одлике савременог математичког мишљења, што се омогућује *улажењем у савремену математику* (1970: 14). Реализација овог задатка у настави математике омогућује повезивање математичких знања и појмова код ученика, у смислу стварања система логички повезаних знања и појмова из области математике. И код овог аутора се потенцира нужност да настава математике треба да омогући овладавање предметом савремене математике. Ово у настави математике може бити омогућено управо остварењем систематског утицаја у правцу подспешивања развоја основа математичког мишљења код ученика, као и избором садржаја наставе који би били усмерени у великој мери на развој мисаоних операција код ученика.

Математички начин мишљења код ученика не развија се независно од основних карактеристика учења и сазнавања у настави математике. Напротив, упоредо са формирањем система математичких знања и појмова *развија се и математичко мишљење* код ученика у наставном процесу, односно путем садржаја наставе математике, под одређеним условима, који се односе на природу математичких знања и појмова у оквиру садржаја наставе, могуће је остварити двосмерни утицај у процесу сазнавања. То подразумева да се у процесу сазнавања у настави математике повеже усвајање знања и развој мисаоних операција у овој области рада у настави. Када се у наставном процесу омогући да ова два развојна тока иду упоредо, тада је практично омогућено да математичко знање и математичко мишљење представљају две димензије јединственог процеса откривања предмета математике, које се налазе у односу међусобне зависности и условљености.

Поред појма „математичко мишљење“, користе се и појмови „аритметичко мишљење“,

„алгебарско мишљење“, „алгебарско резонување“ и слично. Карпентер и Леви (Carpenter & Levi, 2000) указали су на чињеницу да настава треба да омогући ученицима, поред генерализације и формализације свог знања, развој мишљења који треба да се креће од аритметичког до алгебарског мишљења и резонувања.

Упоређујући природу појмова у оквиру математике као науке и у оквиру наставе математике, Цветковић (1981: 70) наглашава да постоји изражено заостајање, а понекад и противречност између садржаја појединих појмова у настави и садржаја тих појмова у науци, као и да постоји незадовољавајући успех у разумевању, усвајању и примени математичких појмова, недовољан утицај наставе на развој интелектуалних способности ученика, што се посебно одражава на ниво и могућности развоја математичког мишљења. Ова неоспорна чињеница посебно се односи на математичке појмове који се усвајају у оквиру наставе математике у млађим разредима основне школе која је заснована на усвајању емпиристичких знања и појмова у овој области. Уочавајући суштинске недостатке наставе засноване на традиционалној емпиристичкој концепцији усвајања појмова и развоја мишљења у настави, као и потребу да се превазиђу постојећи недостаци у настави математике, Цветковић (1981: 71) наглашава следеће: „Неопходно је тако мењати садржај и методе наставе како би се у перспективи стварали услови за развијање научно-теоријског мишљења ученика још од почетка школовања. Тек тако је могуће успоставити нужан склад између савременог стања и кретања науке и научног мишљења и успеха који се у овом погледу у настави постиже“. Исто тако, сматра да је остваривање ових задатака веома тежак и сложен посао који претпоставља специјална, разноврсна и систематска теоријска и експериментална истраживања. Сврха ових истраживања састојала би се у њиховом доприносу конституисању наставних програма за математику, на новим теоријским основама

које би подразумевале избор садржаја наставе математике чије би усвајање омогућило систематски утицај на формирање система математичких знања и развој математичког мишљења код ученика. Све то би у значајној мери допринело унапређењу нивоа и квалитета постигнућа ученика у настави математике.

Разматрајући карактеристике процеса сазнања у настави математике, када је у питању примена различитих наставних метода, Првановић истиче да су у постојећој настави математике углавном заступљене *излајачка*, *показивачка* и *дијалогска метода*. И поред чињенице да се у основној школи не изграђују аксиоматске математичке структуре, према Првановићу (1970: 62–63), математичко образовање ученика може да се реализује „оном комбинацијом разних метода која *омогућује ученику, сваком ученику, да самостално изграђује математичке структуре*, па, дакле и менталне структуре“, наглашавајући да се то може остварити уз помоћ *методе проблема*, односно *методе проблемских ситуација* и то на следећи начин: (1) „стављањем“ ученика у оне ситуације које му омогућавају да сопственом мисаоном активношћу уочава и издваја оно што је математичко; (2) вођењем ученика кроз математичке ситуације тако да он „види“ да се „разне ствари могу назвати истим именом“; и (3) прогресивним оспособљавањем да ситуације структурира. У овом случају су проблемски задаци у настави математике, у којима долазе до изражаја дијалогска метода и метода проблемских ситуација, виђени као средство активног усвајања знања и појмова у области математи-

ке и, према Првановићу, средство утицаја на изградњу математичких и менталних структура код ученика. Наглашава се да основ повезивања знања представља, пре свега, самостална мисаона активност ученика усмерена на одређене математичке садржаје.

Закључак

Улога математике у савременим условима рада и живота је незаобилазна. И као наставни предмет у школи математика све више добија на значају, што се односи и на будућа времена, сходно основним тенденцијама у образовању и њима адекватним теоријским схватањима и разматрањима о правцима и садржају промена у концепцији, улози, облицима и садржају образовања. У сваком погледу, математичко образовање представља основу савременог образовања у било којој области. Један од кључних разлога представља темпо развоја науке и примењених технологија у данашњем времену и све што он доприноси у било којој области људског живота и рада. Било који појединац може успешно пратити овај буран ток развоја, прилагођавати се условима који се на основу тога јављају, суочавати се са новим изазовима и бити активан стваралачки учесник у одређеној области рада, ако му се омогући да у току свог институционалног образовања изгради основе система математичких знања и развије математички начин мишљења. Савремена методичка схватања управо указују на ове могућности наставе математике.

Литература

- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. University of Wisconsin-Madison.
- Давыдов, В. В. (1966). Логико-психологические проблемы начальной математики как учебного предмета; в Д.Б. Эльконин и В.В. Давыдов (ред.): *Возрастные возможности усвоения знаний (54-103)*. Москва: „Просвещение“.
- Давыдов, В. В. (1972). *Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов*. Москва: „Педагогика“.
- Давыдов, В. В. (1986). *Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального психологического исследования*. Москва: „Педагогика“.
- Эльконин, Д. Б. и В. В. Давыдов (ред.) (1966). *Возрастные возможности усвоения знаний*. Москва: „Просвещение“.
- Првановић, С. (1970). *Методика савременог математичког образовања*. Београд: Завод за издавање уџбеника Социјалистичке републике Србије.
- Цветковић, Ж. (1981). Нека новија схватања о усвајању математичких појмова у основној школи, *Настава и васпитање*, бр. 1, 69-79.
- Windsor, W. J. J (2010). *Algebraic thinking – more to do with why than X and Y*, retrieved 17th Nov. 2010, from http://math.unipa.it/~grim/21_project/Windsor592-595.pdf .
- Yarborough, H. (1999). *Algebra with discovery approach*, retrieved 29th Feb. 2006, from <http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED434832.pdf> .

Summary

This paper discusses various approaches to the design concept of learning in mathematics represented in the theory of developmental teaching and in other contemporary theoretical orientations. Within the framework of developmental teaching, it is considered that a key role in learning and cognition in mathematics, which refers to knowing subjects, phenomena and processes of the objective world, should have the content of teaching mathematics. Teaching and the process of learning should be designed in such a way to enable students to discover the inner essence of the subject matter, or discover their internal mathematical essence. Teaching based on this concept of learning allows the formation of a stable system of mathematical knowledge and concepts, which should be one of the main characteristics of effective teaching of mathematics that takes a certain level and quality achievement. In addition, contemporary concepts of the role of learning and cognition in mathematics indicate that an important task in the teaching of mathematics should be to form a mathematical way of thinking of students.

Key words: *teaching, learning and cognition, Mathematics, a system of mathematical knowledge, mathematical way of knowledge.*