MILOŠ ADŽIĆ i SENKA MILOŠEVIĆ

Univerzitet u Beogradu, Filozofski fakultet - Odeljenje za filozofiju, Beograd, Srpska akademija nauka i umetnosti, Matematički institut, Beograd

DOI 10.5937/kultura1234366A
UDK 510.6
16(497.11)"1945/..."
originalan naučni rad

ALGORITMI, KATEGORIJE I DOKAZI – TEME IZ SRPSKE MODERNE LOGIKE

Sažetak: *U ovom radu bavićemo se dvema granama moderne logike onako kako su se one razvijale u Srbiji, počevši od kraja Drugog svetskog rata pa sve do danas. Reč je o teoriji izračunljivosti i teoriji dokaza. Prva od njih, teorija izračunljivosti, sticajem nesretnih okolnosti je u Srbiji ostala bez škole. Druga, teorija dokaza, u Beogradu je pronašla uporište koje danas predstavlja jedno od nekoliko mesta u svetu u kojem se gaji duh Gencenovih ideja, a to je naročito slučaj u kategorijalnoj teoriji dokaza o kojoj će ovde isključivo biti reči.*

Ključne reči: *moderna logika, teorija izračunljivosti, teorija dokaza, kategorijalna teorija dokaza.*

Cilj ovog rada je da istakne neka važna mesta u razvoju moderne logike u Srbiji, od kraja Drugog svetskog rata do danas. Imajući u vidu prirodu i obim ovog rada, moramo se odreći svake pretenzije na potpunost. Umesto toga, trudićemo se da ukažemo na svega nekoliko, po našem mišljenju važnih mesta ovog razvoja, koja su ostala nepoznata, ili nedovoljno poznata, te da ih ovim približimo široj akademskoj, kao i kulturnoj javnosti uopšte.[1]

1 Za potpuniji pregled istorije moderne logike u Srbiji, zainteresovanog čitaoca upućujemo na zbornik radova sa konferencije „Istorijat logike u Srbiji", održane juna meseca 2010. godine, koji je u pripremi, a pod uredništvom Nebojše Ikodinovića i Žarka Mijajlovića. Takođe, rad Mirjane Borisavljević: Doctoral dissertations in logic from *Virtual Library* of the Faculty of mathematics in Belgrade, *Review of the National Center for Digitization*, Vol. 16, 2010, sadrži pregršt korisnih informacija o temama doktorskih disertacija naših logičara, odbranjenih kako u Srbiji tako i u inostranstvu. Za upoznavanje

Na prvom mestu, nekoliko opštih napomena o našem predmetu. Izraze „moderna logika" i „matematička logika" razumemo kao sinonimne. Dakle, pod modernom logikom podrazumevamo onu granu matematike začetu, pre svega, u Fregeovim (Gottlob Frege) radovima s kraja XIX veka, koja je svoju kanonizaciju doživela u prvim decenijama XX veka, zahvaljujući, na prvom mestu, radovima Hilberta (David Hilbert) i Bernajsa (Paul Bernays). Razume se, moderna logika ima jako dugu predistoriju kojom dominira Aristotelova silogistička logika, i koja logiku situira u korpus filozofskih pre nego matematičkih disciplina. Po Kvajnovim (Willard Van Orman Quine) rečima „logika je predmet sa dugom istorijom, koji je 1879. postao veliki"[2]. Godina koju Kvajn navodi jeste godina u kojoj je objavljen Fregeov *Begriffsschrift*, delo za koje s pravom možemo reći da predstavlja vododelnicu između „stare" i nove, moderne logike.[3]

Period između dva svetska rata doveo je do raslojavanja unutar logike, koje je za posledicu imalo izdvajanje četiri osnovne grane ovog predmeta. Reč je o *teoriji skupova*, *teoriji modela*, *teoriji dokaza* i *teoriji izračunljivosti*.

Teorija skupova, najstarija od četiri grane logike, nastaje sedamdesetih godina XIX veka u radovima nemačkog matematičara Georga Kantora (Georg Cantor). Neki autori rađanje ove discipline vezuju za veoma konkretan datum, naime 7. decembar 1873. godine, kada je Kantor pismom obavestio Riharda Dedekinda (Richard Dedekind) o svom otkriću neprebrojivosti skupa realnih brojeva **R**.[4]

sa nešto širim kontekstom razvoja moderne logike na Balkanu, uključujući i srpsku logiku, preporučujemo veoma instruktivnu studiju: Vakarelov D., Logic in Central and Eastern Europe: Balkan Region, in: *Logic and Scientific Methods, Volume One of the Tenth International Congress of Logic Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995*, eds. Dalla Chiara M. L., Kluwer, 1997.

2 Quine W. V. O., *The Methods of Logic*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1966, str. 7.

3 Frege G., *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert Verlag, Halle 1879. Istaknimo na ovom mestu da je trebalo da prođe više od sedam decenija pre nego što je značaj Fregeovog poduhvata ispravno shvaćen. Za nešto drugačije gledište, koje Fregeu odriče izvestan deo zasluga za stvaranje moderne logike koje mu se obično pripisuju, dodeljujući ih pritom Bulu (George Boole) i Persu (Charles Saunders Peirce), zainteresovanog čitaoca upućujemo na: Putnam H., Peirce the Logician, *Historia Mathematica*, Vol. 9, 1982.

4 Za veoma zanimljivu i detaljima bogatu studiju istorije teorije skupova u periodu 1850-1940, zainteresovanog čitaoca upućujemo na: Ferreiros J., *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel 2007.

Rađanje nešto mlađe, teorije modela, obično se vezuje za 1915. godinu i rad „Über Möglichkeiten im Relativkalkül“[5] nemačkog matematičara Leopolda Levenhajma (Leopold Löwenheim). U ovom radu, Levenhajm je dokazao najraniju verziju takozvane *Levenhajm-Skolemove teoreme*, koja po mišljenju mnogih predstavlja okosnicu teorije modela. Levenhajmove rezultate je dvadesetih godina uopštio norveški matematičar Toralf Skolem (Thoralf Skolem), pa otud ime pomenute teoreme. Pored ovog, izuzetno važnog tvrđenja, Levenhajm je u istom radu dokazao da se problem odlučivosti računa predikata sa predikatima dužine ≥ 2 svodi na problem odlučivosti računa koji sadrži samo binarne predikate, kao i da je monadički račun predikata odlučiv.[6]

Teorija dokaza ima svoj izvor u drugom od 23 problema koje je Hilbert izložio na svetskom kongresu matematičara 1900. godine u Parizu. Hilbertova ideja bila je da, na prelazu vekova, istakne neka od važnih, otvorenih pitanja, koja devetnaestovekovna matematika ostavlja matematici narednog veka na rešavanje. Pomenuti, drugi Hilbertov problem, tiče se konzistentnosti formalne aritmetike.[7] Trebalo je dokazati da je formalna aritmetika konzistentna teorija, i to sredstvima koja su strogo slabija od sredstava koje nudi sama formalna aritmetika. Reč je o takozvanim *finitističkim* sredstvima.[8]

Nade da je ovo moguće učiniti konačno su razvejane Gedelovim (Kurt Gödel) *teoremama o nepotpunosti* 1931. godine.[9] Tako Gedelova *druga teorema o nepotpunosti* kaže da svaki formalni sistem koji sadrži formalnu aritmetiku (pa time i sam sistem formalne aritmetike), ukoliko je konzistentan, ne može dokazati

5 Löwenheim L., Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen*, Vol. 76, 1915.

6 Za više o ovoj temi, vidi: Badesa C., *The Birth of Model Theory: Löwenheim's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives*, Princeton University Press, Princeton 2004.

7 Istini za volju, značaj formalizacije aritmetike nije bio uočen istovremeno sa Hilbertovim navođenjem pomenutog problema na svetskom kongresu matematičara. Nekoliko godina nakon kongresa, Hilbert nudi izvesne naznake u pogledu toga kako bi trebalo izgledati rešenje ovog problema, da bi tek dvadesetih godina prošlog veka formulisao razvijen sistem formalne aritmetike unutar koga ovo pitanje dobija jedno sasvim precizno značenje.

8 Čitaoca koji bi želeo da se bliže upozna sa Hilbertovim problemima, kao i nekim rešenjima onih koji su za logiku posebno važni, upućujemo na veoma lep pregled: Mijajlović Ž., Marković Z. i Došen K., *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1986.

9 Vidi: Gödel K., Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I., *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38, 1931.

sopstvenu konzistentnost. Tim pre je ovo nemoguće učiniti unutar nekog striktno slabijeg, finitističkog sistema.[10]

Konzistentnost formalne aritmetike prvi je dokazao nemački logičar Gerhard Gencen (Gerhard Gentzen), Bernajsov đak i Hilbertov asistent u Getingenu od 1935. do 1939. godine. Gencenov dokaz iz 1936. godine,[11] kao i njegov kasniji rad iz 1939.[12] (objavljen 1943. godine) jasno izoluju minimalna sredstva koja su nam neophodna ukoliko želimo dokazati konzistentnost ovog formalnog sistema. Ovi rezultati označavaju rođenje *ordinalne analize*, grane teorije dokaza koja proučava sredstva neophodna za dokazivanje konzistentnosti različitih formalnih sistema.

Ovi rezultati u suštinskom smislu počivaju na rezultatima njegove doktorske disertacije, odbranjene 1933. godine.[13] Gencenova teza[14] obiluje originalnim idejama, i sadrži mnogo više od klice onoga što će postati *opšta teorija dokaza*, grana teorije dokaza o kojoj će više reči biti u nastavku. *Teorema o eliminaciji sečenja*, koju je Gencen formulisao i dokazao,[15] jedan je od najlepših

10 Izvesna doza opreza je neophodna na ovom mestu. Nije u potpunosti jasno koja se tačno sredstva mogu smatrati finitističkim. Najčešće se pretpostavlja da je, za Hilberta, finitistički fragment formalne aritmetike oličen u Skolemovoj *primitivno-rekurzivnoj aritmetici* (*PRA*). Ukoliko je ovo slučaj, onda zaista *PRA* ne dokazuje konzistentnost formalne aritmetike na osnovu druge Gedelove teoreme o nepotpunosti. Međutim, ovakvo određenje finitistički dopuštenih sredstava se može smatrati prestrogim. Tako, ukoliko dopustimo izvesne oblike transfinitne indukcije u korpusu finitističkih sredstava, moguće je dati potvrdan odgovor na Hilbertov drugi problem.

11 Gentzen G., Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, Vol. 112, 1936.

12 Gentzen G., Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, Vol. 119, 1943. Rezultati objavljeni u ovom radu deo su Gencenove habilitacione teze, odbranjene 1939. godine.

13 Kako smo već napomenuli, Gencen je bio Bernajsov đak, ali je formalni mentor njegove doktorske disertacije bio Herman Vajl. Razlog ovome jeste to što je Bernajsu 1933, zbog njegovog jevrejskog porekla, oduzeta profesura u Getingenu.

14 Teza je objavljena u dva dela i to kao: Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schließen I, *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 39, 1934. i Untersuchungen über das logische Schließen II, *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 39, 1935. U prevodu na engleski jezik: "Investigations into logical deduction", in: Szabo M. E. (ed.), The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland, Amsterdam, 1969.

15 Akcenat je ovde koliko na samom dokazu, toliko, ako ne i više, na formulaciji. Čini se da je stepen originalnosti koji je Gencen pokazao bio neophodan da bi se sprovela prava analiza logičke dedukcije i, nakon toga, uopšte formulisala pomenuta teorema. Nešto slično dogodilo se nekoliko godina ranije, 1930. godine, kada je Gedel dokazao *teoremu potpunosti* predikatskog računa, jednu od najvažnijih teorema logike uopšte. Svi neophodni rezultati bili su takoreći „u vazduhu", ali niko sebi nije postavio to pitanje.

rezultata logike i matematike uopšte. Ideja kojoj je u svojoj tezi pristupio, u kontekstu koje je pomenuta teorema i dokazana, bila je da se, veoma ozbiljno i savesno, posveti problemu analize logičke dedukcije. Minucioznost koju je pokazao u bavljenju ovim problemom, teško da je do danas prevaziđena. U ove svrhe, Gencen je razvio dva sistema analize formalnih dedukcija, *sistem prirodne dedukcije* i *sistem sekvenata*. Oba ova sistema, kao i rezultati njihove analize, zauzimaju važno mesto kako u teoriji dokaza tako i u modernoj logici uopšte.

Teorija izračunljivosti nastaje tridesetih godina prošlog veka, u pokušaju da se odgovori na naizgled jednostavno pitanje - šta je to izračunljiva (aritmetička) funkcija. Kao odgovor na ovo pitanje, a u kratkom vremenskom rasponu od svega nekoliko godina, ponuđeni su različiti modeli izračunljivosti: Tjuringove mašine,[16] rekurzivne funkcije,[17] račun lambda,[18] kao i Postove mašine.[19]

Svi ovi modeli predstavljaju pokušaj matematičke formalizacije i analize pojma efektivne procedure ili algoritma. Zadivljujuća je činjenica, koja će nedugo zatim biti dokazana, da su svi ovi modeli međusobno ekvivalentni, tj. da definišu istu klasu aritmetičkih funkcija. Da li ovi modeli pružaju adekvatnu analizu

16 Kako već samo ime govori, pojam Tjuringove mašine dugujemo engleskom logičaru Alenu Tjuringu, koji ga je formulisao 1935, kao dvadesetdvogodišnji student matematike na Univerzitetu u Kembridžu. Tjuringov rad, objavljen naredne, 1936. godine, jedan je od kamena temeljaca teorije izračunljivosti, verovatno i najznačajniji. U ovom radu Tjuring nudi veoma preciznu analizu pojma intuitivne izračunljivosti, da bi u svetlu ove analize formulisao pojam Tjuringove mašine, veoma jednostavnog, formalnog modela (intuitivne) izračunljivosti. Pored toga, Tjuring je definisao pojam takozvane *univerzalne Tjuringove mašine*, koja je u stanju da oponaša rad ma koje druge Tjuringove mašine. Na kraju, Tjuring je dokazao i neodlučivost predikatskog računa, dajući pritom (negativan) odgovor na Hilbertov *Entscheidungsproblem*. Vidi: Turing A., On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series*, Vol. 42, 1936.

17 Pojam rekurzivne funkcije prvi uvodi Gedel, u radu iz 1931. u kom je dokazao svoje teoreme o nepotpunosti. Nedugo zatim, ovaj pojam je standardizovao Stefan Kol Klini (Stephen Cole Kleene), dajući mu oblik u kome ga i danas zatičemo. Vidi: Kleene S. C., General recursive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen*, Vol. 112, 1936, kao i Recursive predicates and quantifiers, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 53, 1943. istog autora.

18 Lambda-definabilne funkcije prvi put uvodi američki logičar Alonzo Čerč (Alonzo Church) u radu An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, Vol. 58, 1936. U ovom radu Čerč je, nazavisno od Tjuringa, dokazao nerešivost Hilbertovog *Entscheidungsproblem*-a.

19 Pojam Postove mašine dugujemo američkom logičaru poljskog porekla, Emilu Postu (Emil Post), koji ga je formulisao u radu Finite Combinatory Processes. Formulation I, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, 1936.

pojma intuitivne izračunljivosti? Drugim rečima, da li je svaka intuitivno izračunljiva funkcija ujedno i izračunljiva putem Tjuringove mašine, primera radi? Da je ovo slučaj, tvrdi takozvana *Čerč-Tjuringova teza*. Iako se ne možemo nadati njenom strogom dokazu, budući da dovodi u vezu jedan intuitivni (efektivna izračunljivost) i jedan formalni pojam (Tjuring izračunljivost), u prilog ovoj tezi govori činjenica da se svaka funkcija koju možemo smatrati intuitivno izračunljivom do sada pokazala kao Tjuring izračunljiva.[20]

Ova tradicionalna podela, razume se, ne pokriva čitavu današnju logiku. Na ovom mestu bismo želeli da istaknemo uticaj teorije kategorija, jedne mlade grane algebre na modernu logiku, i obratno. Simbiotska priroda ovog odnosa se možda najlepše vidi u odnosu teorije kategorija i teorije dokaza, o čemu će još biti reči.

* * *

U nastavku ovog rada bavićemo se dvema granama moderne logike onako kako su se one razvijale u Srbiji, počevši od kraja Drugog svetskog rata pa sve do danas. Reč je o teoriji izračunljivosti i teoriji dokaza. Prva od njih, teorija izračunljivosti, sticajem nesretnih okolnosti je u Srbiji ostala bez škole. Druga, teorija dokaza, u Beogradu je pronašla uporište koje danas predstavlja jedno od nekolicine mesta u svetu u kojem se gaji duh Gencenovih ideja, a to je naročito slučaj u kategorijalnoj teoriji dokaza o kojoj će ovde isključivo biti reč.

Prvi kurs logike u Srbiji nakon Drugog svetskog rata, na Filozofskom fakultetu u Beogradu, drži Kajica Milanov (1905-1986). Milanov je filozofiju studirao u Beču od 1924. do 1928. godine, gde je i doktorirao 1932. Tokom studija, bio je u prilici da se upozna sa jednim od najznačajnijih filozofskih pravaca svoga doba, na mestu na kom je i začet. Reč je, naravno, o *logičkom pozitivizmu* pripadnika *Bečkog kruga*.[21] O uticaju filozofije

20 Svi klasični radovi iz teorije izračunljivosti koje smo do sada imali prilike da navedemo, sabrani su u zborniku: Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York 1965.

21 Iako zvanično osnovan 1928. godine (kao *Društvo Ernsta Maha*), Bečki krug ima dužu predistoriju. Ova poslednja započinje 1908. sastancima Filipa Franka (Philipp Frank), Hansa Hana (Hans Hahn) i Ota Nojrata (Otto Neurath), posvećenim, pre svega, temama iz filozofije nauke. Značajna prekretnica u radu ove grupe nastala je objavljivanjem Vitgenštajnovog (Ludwig Wittgenstein) kapitalnog dela *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1921. godine (dvojezično, nemačko-englesko izdanje, pojavilo se, naredne, 1922). Počevši od 1926. godine, organizovan je niz sastanaka koji su bili posvećeni upravo *Traktatu*. Sastancima je, u ovom periodu, rukovodio Moric Šlik (Moritz Schlick), filozof i fizičar, koji je, na inicijativu Hana i Franka, postao član

Bečkog kruga na Milanova govori i činjenica da je, po povratku u Beograd, svoju važnu studiju, *Osnovni problemi teorije saznanja*, pisao upravo u duhu ove škole. Ova knjiga bila je prvi, i dugo zatim i jedini udžbenik epistemologije kod nas. Nažalost, iako po svom sadržaju veoma savremena, ona nije doživela veliki odjek u našoj sredini i ubrzo je završila u senci filozofije dijalektičkog materijalizma. Nakon završetka rata, na Filozofskom fakultetu u Beogradu, Milanov predaje matematičku logiku u periodu od 1945. do 1947. godine kada, usled političkog progona, biva prinuđen da emigrira za Australiju. Od tada pa sve do kraja pedesetih godina, moderna logika nije uspevala da pronađe svoje mesto u srpskim školama.

Prvi moderni srpski logičar, u pravom smislu te reči, bio je Vladeta Vučković. Nakon završenih studija matematike na Matematičkom fakultetu u Beogradu, Vučković nastavlja da se bavi matematikom i 1953. brani doktorsku disertaciju iz oblasti matematičke analize kod mentora Jovana Karamate, jednog od najpoznatijih srpskih matematičara. Sedam godina kasnije, 1960-te, stiče profesuru na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Iste godine posećuje sastanke *Praxis* grupe, gde se upoznaje sa nekim od vodećih filozofa u Srbiji i Jugoslaviji onog vremena. U matematičkoj logici je bio samouk, bavio se teorijom izračunljivosti iz koje je držao i predavanja 1962. godine, na Filozofskom fakultetu u Beogradu. U publici su, pored nastavnika sa Filozofskog fakulteta, Svetlane Knjazeve i Aleksandra Krona, bili i postdiplomci sa Matematičkog fakulteta. Nažalost, zahvaljujući razlozima koji nemaju veze sa naukom, a u duhu izdašnosti u pogledu represalija prema političkim neistomišljenicima sistema onoga vremena, Vučković je, kao i Milanov nepunih dvadeset godina pre njega, bio prinuđen da emigrira, ovoga puta za Sjedinjene Američke Države.

Vučkovićev prvi rad iz oblasti logike *Partially ordered recursive arithmetics*,[22] predstavlja zanimljivu varijaciju Gudstinovog[23] jednakosnog računa, koji dopušta primitivno-rekurzivne definicije, i unutar koga je moguće dokazati veliki

katedre ze filozofiju Univerziteta u Beču pet godina ranije, 1921. godine. Bečkom krugu se te iste, 1926. godine, pridružuje i Rudolf Karnap (Rudolf Carnap). Godine koje je Milanov proveo na Univerzitetu u Beču, bez sumnje predstavljaju najplodniji period rada Bečkog kruga, kao i filozofije s prve polovine XX veka uopšte.

22 Vučković V., Partially ordered recursive arithmetics, *Mathematica Scandinavica*, Vol. 7, 1959.

23 Goodstein R. L., *Recursive number theory: A development of recursive arithmetic in a logic-free equation calculus*, *North-Holland, Amsterdam* 1957. Gudstinov rad predstavlja formulaciju Skolemove primitivno-rekurzivne aritmetike, koju smo već imali prilike da spomenemo, putem jednakosnog računa.

broj tvrđenja elementarne aritmetike.[24] Vučkovićeva ideja bila je da, umesto jedne operacije sledbenika S, razmatra čitavu klasu (konačnu ili prebrojivo beskonačnu) različitih operacija sledbenika $\{S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\}$ ili $\{S_0, S_1, \ldots\}$. Jedna od aksioma Vučkovićevog jednakosnog računa nam garantuje da svaka od ovih operacija komutira sa svakom drugom (bez ove aksiome ne bismo bili u stanju da dokažemo, primera radi, da je definisana operacija sabiranja komutativna). Gradeći na ovoj osnovi, Vučković je pokazao kako je, unutar njegovog aksiomatskog sistema, moguće definisati uobičajene rekurzivne operacije. Pored toga, na osnovu sredstava koja nam ova aritmetika pruža, možemo definisati i logičke veznike, kako klasične tako i intuicionističke. Izvestan „nedostatak“ Vučkovićevog rada predstavlja činjenica da u njemu nisu definisane ograničene sume i proizvodi rekurzivnih funkcija, što bi onda omogućavalo uvođenje ograničenih kvantifikatora u njegovu formalnu aritmetiku. Ovaj problem Vučković će otkloniti nekoliko godina kasnije, u radu „Einführung von $\Sigma_f(x)$ und $\Pi_f(x)$ in der rekursiven Gitterpunktarithmetik“.[25]

Svega godinu dana nakon svog prvog objavljenog rada iz oblasti logike, Vučković objavljuje obimnu i veoma originalnu studiju *Rekursive Wortarithmetik*,[26] koja u mnogim aspektima sadrži jezgro njegovih kasnijih logičkih radova. Vučkovićeva *rekurzivna aritmetika reči* predstavlja uopštenje uobičajene rekurzivne aritmetike, utoliko što umesto skupa svih reči na alfabetu $\{0,S\}$ razmatra skup svih reči na proširenom alfabetu $\{0,S_0, S_1,\ldots,S_{n-1}\}$. Slično tome, definicija rekurzivnih funkcija na rečima putem primitivne, kao i dvostruke, rekurzije uopštava standardne rekurzivne definicije aritmetičkih funkcija. Sličnost sa sistemom, koji je Vučković predložio u ranijem radu, je očigledna. Kao i *parcijalno uređena rekurzivna aritmetika*, i rekurzivna aritmetika reči je izražena na istom alfabetu, i aksiomatizovana putem jednakosnog računa. Razlika između ova dva sistema ogleda se u tome što, dok u prvom sistemu operacije $S_m S_n$ komutiraju za svako n,m, u potonjem imamo da kada je $m \neq n$ važi $S_m S_n \neq S_n S_m$.

24 Iako ćemo se truditi da čitaoca ne opteretimo previše tehničkim pojmovima, sama priroda materija nam ne ostavlja mnogo izbora sem da, u pojedinim prilikama, određene pojmove, čije su definicije suviše kompleksne da bi se u celosti izložile, ostavimo nedefinisanim. U svakom takvom slučaju, čitaoca upućujemo na: Rogers H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New York 1967.

25 Vučković V., „Einführung von $\Sigma_f(x)$ und $\Pi_f(x)$ in der rekursiven Gitterpunktarithmetik“, *Doklady Bolgarskoj Akademija Nauk.*, Vol. 6, 1962.

26 Vučković V., Rekursive Wortarithmetik, *Publications de l’Institut Mathématique*, Vol. 14, 1960.

Uopštenje prethodnih rezultata Vučković je ponudio u radu *On some possibilities in the foundations of recursive arithmetics of words,*[27] u kom razmatra sisteme čiji je jezik formulisan na alfabetu $\{S_\alpha : \alpha \in I\}$. Jedino što se pretpostavlja u vezi sa ovim alfabetom jeste da su svi simboli međusobno različiti, kao i da postoji istaknut simbol. Čak i uz minimalne pretpostavke ovog tipa, Vučković je uspeo da pokaže da je karakteristična funkcija jednakosti reči primitivno-rekurzivna, kao i da je izvestan vid indukcije, koju Vučković naziva *etažnom indukcijom*, dokaziv u ovom sistemu.

Nekoliko godina kasnije, u radu *Almost recursive sets*,[28] Vučković ispituje izvesnu varijaciju pojma *retraceable* skupa, koji su uveli Deker (Jacob Dekker) i Majhil (John Myhill). Naime, za proizvoljan skup $A \subset \mathbf{N}$ neka je $\rho_A(x)$ jednaka kardinalnosti skupa $\{y{:}y \in A \wedge y < x\}$. Skup A je rekurzivan ako i samo ako je funkcija ρ_A rekurzivna. Skup A je *gotovo rekurzivan* ako i samo ako se restrikcija funkcije ρ_A na skup A može proširiti do parcijalno rekurzivne funkcije. Pored pojma gotovo rekurzivnog skupa, ovaj rad uvodi i pojmove *gotovo rekurzivne funkcije* kao i *gotovo semirekurzivnog skupa*. Vučković dalje dokazuje da je svaki *retraceable* skup gotovo rekurzivan, kao i da je svaki gotovo rekurzivan skup čiji je komplement semirekurzivan *retraceable*. Oslanjajući se na rezultate Majhila i Dekera, Vučković je dalje pokazao da je svaki Tjuringov stepen gotovo rekurzivan, kao i da je svaki semirekurzivan Tjuringov stepen u isto vreme i stepen semirekurzivnog skupa, čiji je komplement gotovo rekurzivan.

Ove rezultate dodatno je uopštio Vučkovićev đak, Džon Beri (John Berry), koji je detaljno ispitao klasifikaciju *retraceable*, regresivnih, imunih, hiperimunih, gotovo rekurzivnih, gotovo semirekurzivnih skupova itd., dokazavši pritom izvesne relacije između poslednjih dvaju klasa i dobro poznatih klasa koje im prethode.[29]

Vučkovićev rad *Creative and weakly creative sequences of r.e. sets*[30] nudi alternativnu definiciju klase Klivovih (John Cleave)

27 Vučković V., On some possibilities in the foundations of recursive arithmetics of words, *Glasnik Matematičko-Fizički i Astronomski* (*Series II*), Vol. 17, 1962.

28 Vučković V., Almost recursive sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 23, 1969.

29 Berry J. W., Almost recursively enumerable sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 164, 1972.

30 Vučković V., Creative and weakly creative sequences of r.e. sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 18, 1967.

kreativnih nizova semirekurzivnih skupova.[31] Ovi pojmovi imaju svoj izvor u Majhilovom[32] pojmu *kreativnog skupa*, koji je dalje uopštio Smalijan[33] (Raymond Smullyan) definisanjem *parova kreativnih skupova*. Vučkovićeva definicija ima tu prednost što predstavlja neposredno uopštenje Smalijanove definicije, što je čini donekle jednostavnijom od one koju je ponudio Kliv. Služeći se Vučkovićevim rezultatima, njegova studentkinja na univerzitetu Notr Dejm (Notre Dame), Ejdrian Karpentije (Adrian Carpentier) je standardne definicije efektivne nerazdvojivosti, univerzalnosti itd., kao i rezultate s njima u vezi, proširila na dvostruke kreativne nizove.[34]

Još jedan Vučkovićev đak, Tomas Pejn (Thomas Payne), ostavio je iza sebe značajne rezultate koji karakterišu klasu kreativnih nizova, detaljno ispitujući teoriju takozvanih *završenih nizova* koju dugujemo Maljcevu (Анатóлий Ивáнович Мáльцев).[35] Ove rezultate Pejn je kasnije primenio u ispitivanju efektivnih fiksnih tačaka nizova, dovodeći ih u vezu sa mogućnošću proširenja parcijalno rekurzivnih funkcija do totalnih rekurzivnih funkcija.[36]

U nešto kasnijim radovima,[37] Vučković razvija ideju *rekurzivne mnogostrukosti,* koju je prvi put formulisao 1973. godine u radu *Local recursive theory*.[38] Grubo govoreći, rekurzivnu mnogostrukost čine skup, zajedno sa odgovarajućom strukturom koja je, u određenom smislu, efektivna. Vučković dokazuje mnoge zanimljive rezultate o ovoj klasi objekata, koji prate one uobičajene iz topologije mnogostrukosti. Osim ispitivanja „lokalne" strukture rekurzivnih i semirekurzivnih mnogostrukosti, Vučković se koristi i sredstvima teorije kategorija, koja mu omogućava

31 Cleave J. P., Creative functions, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, Vol. 7, 1961.

32 Myhill J., Creative sets, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, Vol. 1, 1955.

33 Smullyan R. M., *Theory of formal Systems*, Princeton University Press, Princeton 1961.

34 Carpentier A., Creative sequences and double sequences, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 9, 1968.

35 Payne T. H., Sequences having an effective fixed-point property, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 165, 1972.

36 Payne T. H., Effective extendability and fixed points, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 14, 1973.

37 Vidi: Vučković V., Recursive and recursively enumerable manifolds I, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 18, 1977., i Recursive and recursively enumerable manifolds II, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 18, 1977.

38 Vučković V., Local recursive theory, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 14, 1973.

ispitivanje „globalnih“ svojstava kategorije semirekurzivnih mnogostrukosti *REM*.[39]

Iako su Vučkovićevi radovi, pre svega, iz oblasti teorije izračunljivosti, on je uspevao da ih, na zanimljiv način, poveže i sa drugim oblastima logike. Tako, primera radi, njegov rad *Rekurzivni modeli nekih neklasičnih iskaznih računa*,[40] ispituje iskazni račun *A*, koji je blizak intuicionističkom, i u kome je, za razliku od intuicionističkog iskaznog računa, dokaziv slab oblik zakona isključenja trećeg, $\neg p \vee \neg\neg p$. Kao ni u intuicionističkom računu, ni u računu *A* nisu dokazivi $p \vee \neg p$ kao ni $\neg\neg p \rightarrow p$. Model ovog iskaznog računa Vučković konstruiše unutar svoje rekurzivne aritmetike reči, izražene na jeziku $\{0, S_0, S_1\}$, tako što svakom od veznika $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ pridružuje jednu rekurzivnu funkciju. Ovako definisan model ima to svojstvo da, ukoliko je φ formula jezika od *A* i ako je φ^* rekurzivna funkcija dobijena zamenom veznika odgovarajućim rekurzivnim funkcijama, onda važi da, ako je φ dokaziva u *A*, onda je jednakost $\varphi^* = 0$ dokaziva u rekurzivnoj aritmetici reči. Međutim, Vučkovićeva aksiomatizacija nije posedovala svojstvo potpunosti, na šta je ukazao Sobočinjski (Bolesław Sobociński), koji je ujedno i formulisao potpunu ekstenziju Vučkovićevog sistema *A*.[41]

Pored rada koji je u strogom smislu logički, Vučković je bio upoznat i sa temama koje su karakterisale ondašnje rasprave oko osnova matematike. Tako, u tekstu diskusije koji je objavljen 1963. godine,[42] Vučkoviću polazi za rukom da čitaoca, na veoma jasan i znalački način, uputi na najznačajnija mesta filozofije matematike. Pošavši od problema antinomija u teoriji skupova, kao i pitanja aksiomatizacije teorije skupova i matematičkih teorija uopšte, Vučković koncizno predstavlja tri glavne škole u osnovama matematike: *logicizam* Fregea i Rasla (Bertrand Russell), Brauverov (Jan Brouwer) *intuicionizam,* kao i Hilbertov *formalizam*. Takođe, Vučković ne propušta da istakne filozofski značaj pojedinačnih rezultata logike: Gedelove teoreme o nepotpunosti i njihove posledice po Hilbertov program, Gencenov dokaz konzistentnosti Peanove aritmetike, Levenhajm-Skolemova teorema i takozvani Skolemov paradoks, Čerč-Tjuringova teza i pojam izračunljive funkcije, samo su neki od momenata koje ovaj rad apostrofira. Čitaocu koji je upoznat sa savremenom

39 Vidi: Vučković V., Recursive and recursively enumerable manifolds II, str. 397.

40 Vučković V., Rekurzivni modeli nekih neklasičnih iskaznih računa, *Filozofija*, Vol. 4, 1960.

41 Sobociński B., On the propositional system *A* of Vučković and its extension I, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 5, 1964.

42 Vučković V., Filozofski aspekti istraživanja o osnovama matematike, *Filozofija*, Vol. 1, 1963.

literaturom iz oblasti filozofije matematike neće biti teško da uoči aktuelnost tema koje je Vučković istakao pre ravno pola veka, što svedoči o daru koji je posedovao i koji mu je omogućio da, između mnogih, izdvoji upravo one probleme koji će zaokupljati pažnju logičara i filozofa sve do danas.

Kako smo već napomenuli, teorija izračunljivosti nastala je kao odgovor na konceptualno, gotovo filozofsko, pitanje *šta je to izračunljiva funkcija*. Ovo, međutim, ništa ne umanjuje na dubini i lepoti rezultata ove teorije kao ni na širini njenih primena, kako u matematici tako i u drugim naukama. Jednako važno jeste i pitanje *šta je to dokaz*.

Baveći se ovim i sličnim pitanjima, Pravic (Dag Prawitz) je početkom sedamdesetih uveo oblast logike kojoj je dao ime *opšta teorija dokaza.*[43] Ime nije rasprostranjeno, ali je potrebno, i vrlo pogodno da se označi onaj deo teorije dokaza koji se bavi samim dokazima i svoj koren ima u Gencenovoj tezi. To se razlikuje od onoga što se uobičajeno naziva teorijom dokaza i što se bavi mogućnošću da se konzistentnost matematike dokaže finitističkim metodama. Ova druga vrsta teorije dokaza, koju je Pravic nazvao *reduktivnom*, ima osnove u Hilbertovom programu,[44] kao što smo već napomenuli. Glavna Gencenova ideja, koja je u osnovi izgradnje sistema prirodne dedukcije, jeste razlaganje dedukcija na atomske korake (korake koji uključuju samo jednu logičku konstantu) i njihova podela na dve vrste: uvođenja i eliminacije. Za svaku logičku konstantu postoje pravila obe vrste. Pravilo za uvođenje daje uslove za izvođenje rečenica čiji je glavni simbol data logička konstanta, dok pravilo za eliminaciju govori koji se direktni zaključci mogu izvesti iz rečenice koja kao glavni simbol ima tu logičku konstantu. Svaka logička konstanta sada je okarakterisana svojim mestom u dedukciji, dakle čisto sintaktičkim sredstvom, a ne istinosnim uslovima kao u teoriji modela.

Krajem sedamdesetih, Kosta Došen se bavio karakterisanjem logičkih konstanti klasične, intuicionističke i supstrukturalnih logika ekvivalencijama između sekventa u kome se analizirana konstanta javlja na određenom mestu i strukturalnog sekventa (sekventa u kome se ne javlja nijedna logička konstanta).[45] U

43 Vidi: Prawitz D., Ideas and results in proof theory, in: *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, eds. Fenstad J. E., North-Holland, Amsterdam 1971, kao i Prawitz D., The philosophical position of of proof theory, in: *Contemporary Philosophy in Scandinavia*, eds. Olson R.E., The John Hopkins Press, 1972.

44 Ibid.

45 Vidi: Došen K., Logical constants as punctuation marks, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 30, 1989, gde su sumirani rezultati Došenove disertacije napisane deset godina ranije.

osnovi ovakve karakterizacije je pretpostavka da je strukturalni deo osnovni deo logike, dok su logičke konstante sekundarne, one igraju istu ulogu u različitim strukturalnim kontekstima. Jedna posledica takvog uvida je da se logički sistemi razlikuju po tome koja strukturalna pravila usvajaju, a ne po tome šta pretpostavljaju o logičkim konstantama. To je omogućilo Došenu da se supstrukturalnim logikama bavi na jedinstven način: za sve njih zadržava ista pravila za logičke konstante, a menja jedino strukturalna pravila. Tako je relevantna logika, primera radi, okarakterisana prosto odsustvom slabljenja. Došen je skovao i naziv supstrukturalne logike.[46] Druga važna posledica je demarkacija logike, koja se sastoji u određenju logičke konstante kao konstante koja je strukturalno analizirana (pomenutom ekvivalencijom između strukturalnog sekventa i sekventa sa konstantom).

Upoznavanjem sa teorijom kategorija, Došen je uvideo da su njegove analize logičkih konstanti samo površni aspekt *adjunkcije*, jednog od centralnih pojmova teorije kategorija, kao što je to i Gencenov i Pravicov princip inverzije za prirodnu dedukciju, koji kaže da se pravila za eliminaciju logičke konstante mogu dobiti iz pravila za uvođenje.[47] Adjunkcija je fenomen koji možemo prepoznati iza velikog broja pojmova u logici i matematici. Logika se pre svega bavi induktivno definisanim pojmovima, a induktivne definicije dovode do slobodnih struktura koje su u vezi sa adjunkcijom. Adjunkciju takođe nalazimo iza teorema potpunosti, tj. teorema koje uspostavljaju vezu „ako i samo ako“ tipa između sintakse i semantike. Adjunkcija je ipak u logici najspecifičnije prisutna kroz njenu vezu sa logičkim konstantama. Grubo govoreći, adjunkcija je deo ekvivalencije između kategorija, tj. iako dve kategorije ne moraju biti ekvivalentne (jedna može biti bogatija od druge), nešto suštinsko je sačuvano u prelazu od bogatije kategorije ka siromašnijoj – dve kategorije dele zajedničko jezgro.

Veliki deo opšte teorije dokaza čini kategorijalna teorija dokaza, oblast na granici logike i teorije kategorija. Primenu Gencenove teorije dokaza na teoriju kategorija, i obrnuto, uveo je Lambek (Joachim Lambek) 1960, i to je početak kategorijalne teorije dokaza. Veza se uspostavlja tako što možemo uzeti da sekvent oblika $f : A \vdash B$ gde su A i B iskazi, predstavlja strelicu (morfizam) u kategoriji u kojoj su A i B objekti. Posebne

46 Termin je prvi put pomenut na konferenciji posvećenoj tim logikama u Tibingenu septembra 1990, a u štampi se prvi put javlja u radu Modal translations in substructural logics, *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 21, 1992.

47 Vidi: Došen K., Models of deduction, in: Proceedings of the Workshop "Proof-Theoretic Semantics, Tuebingen 1999", *Synthese*, eds. Kahle R. and Schroeder-Heister P., Vol. 148, 2006.

strelice u teoriji kategorija su aksiome, a operacije na strelicama su pravila izvođenja. Jednakosti strelica su jednakosti dedukcija, odnosno kategorijalne jednakosti između strelica imaju dokazno-teorijski smisao. Rezultat Lambekovog uvođenja kategorijalnih metoda u teoriju dokaza, i obrnuto, jeste to što je pokazao da je teorema dedukcije površni aspekt adjunkcije koja uključuje sistem i njegovo proširenje. To je pojačanje teoreme dedukcije i vodi pojačanju Gencenovog određenja intuicionističke implikacije kroz teoremu dedukcije i *modus ponens*. Ove adjunkcije mogu poslužiti da se okarakterišu veznici konjunkcije i intuicionističke implikacije. Došen je dao jednu novu formulaciju Lambekove teoreme i izvukao neke posledice iz te nove formulacije, koje ukazuju na bliskost sa teoremom dedukcije u logici. Došenova teorema je nazvana *deduktivnom potpunošću* da bi se razlikovala od Lambekove, koja se naziva funkcionalna potpunost.[48]

Veza između teorije kategorija i logike utvrđena je uglavnom kroz Louvirove (Francis William Lawvere) ideje. Louvir je izneo značajnu tezu[49] da su sve logičke konstante okarakterisane adjungovanim *funktorima*.[50] On nije okarakterisao konjunkciju i intuicionističku implikaciju kroz adjunkcije funkcionalne potpunosti, nego oslanjajući se na bijekciju između skupa morfizama $(A \text{ x } C, B)$ i skupa morfizama $(C, A \rightarrow B)$. Došenov uvid da su njegove analize logičkih konstanti samo površni aspekt adjunkcije i kasnija razmatranja donose i jednu novinu u odnosu na Louvirovu tezu: u adjunkciji koja karakteriše određenu konstantu, jedan funktor treba da je strukturalan u Gencenovom smislu (nevezan za bilo koju operaciju kategorije, ima smisla za bilo koju kategoriju). Vidimo da nijedan od funktora A x i $A \rightarrow$ u Louvirovoj tezi nije strukturalan.

Pored pojma adjunkcije, koji je jedan od osnovnih u kategorijalnoj teoriji dokaza, kategorijalna teorija dokaza je blisko povezana sa onim što kategoričari zovu *koherencijskim rezultatima*. Termin koherencija pokriva u teoriji kategorija ono što bi se sa logičke tačke gledišta nazvalo problemima potpunosti, aksiomatizabilnosti i odlučivosti. To obuhvata pitanje da li smo za određene kategorije pretpostavili sve jednakosti između strelica koje je trebalo pretpostaviti. Potpunost ovde ne moramo razumeti kao potpunost s obzirom na model, ali je neka vrsta modelsko-teorijske potpunosti često prisutna u koherencijskim pitanjima. Pored toga, problemi koherencije uključuju odlučivanje da li dve

48 Došen K., Deductive Completeness, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 2, 1996.

49 Lawvere F. W., Adjointness in foundations, *Dialectica*, Vol. 23, 1969.

50 Funktor je homomorfizam (preslikavanje koje čuva strukturu) između dve kategorije.

strelice predstavljaju istu strelicu, a ponekad mogu uključivati pitanje odlučivanja da li u datoj kategoriji postoji strelica određenog tipa. Razmatranje koherencije uveo je u teoriju kategorija Meklejn (Saunders Mac Lane) koji je, oslanjajući se na Gencenovu metodu eliminacije sečenja, dokazao teoremu koherencije za simetrične monoidalne zatvorene kategorije (koje odgovaraju multiplikativnom konjunktivno-implikacionom fragmentu intuicionističke linearne logike, tj. to su kategorije u kojoj ta logika može da se predstavi).

Do sada su kod nas u ovoj oblasti postignuti novi koherencijski rezultati za kategorije sa *disocijativnošću* (disocijativnost je princip koji daje distributivnost u kontekstu mreža, ali je u stvari asocijativnost koja uključuje dve operacije; otud ime) koje pokrivaju dokaze u multipikativnom konjunktivno-disjunktivnom fragmentu linearne logike i dokaze u konjunktivno-disjunktivnom fragmentu klasične logike. Najoriginalniji doprinos je dokaz koherencije za Bulove kategorije (Bulove kategorije su netrivijalne kategorije za klasičnu logiku).[51] Obično se smatra da je beznadežno pokušavati da se nađe kategorija za klasičnu logiku, jer su svi prihvatljivi kandidati, zasnovani na pojmu bikartezijanske zatvorene kategorije, do sada vodili izjednačenju svih dokaza sa istim premisama i istim zaključcima, tj. trivijalizaciji kategorije. U Bulovim kategorijama koje daju Došen i Petrić to nije slučaj. Tu se kao mesto razlaza intuicionističke i klasične logike označava shvatanje distributivnosti. U intuicionističkoj teoriji dokaza distributivnost konjunkcije nad disjunkcijom jeste izomorfizam, dok distributivnost disjunkcije nad konjunkcijom nije. Takav delimičan izomorfizam postoji u bikartezijanskim zatvorenim kategorijama. Onda se uzme da za klasičnu teoriju dokaza nemamo nijedan od tih izomorfizama, i tako se nanovo uspostavlja simetrija karakteristična za bulovske veznike.

Ove teoreme koherencije daju jednostavnu proceduru za odlučivanje da li su dva dokaza identična. Pritom se razmatra ograničen pojam koherencije kao postojanja vernog funktora koji čuva strukturu iz slobodno generisane kategorije, izgrađene od sintaktičkog materijala (objekti su formule, a strelice dedukcije), u kategoriju čije su strelice relacije između konačnih ordinala. Meklejnovi koherencijski rezultati za monoidalne i simetrične monoidalne kategorije su potpuno pokriveni ovim pojmom koherencije. Dobijen je i koherencijski rezultat za opšti pojam adjunkcije, kao i analogni koherencijski rezultat za samoadjunkcije, gde je endofunktor adjungovan samom sebi. Kroz ovaj

51 Vidi: Došen K. i Petrić Z., *Proof-Theoretical Coherence*, College Publications, London 2004, gde je dat primer takve kategorije (ch. 14).

poslednji rezultat dolazi se do teorije Temperli-Libovih algebri. Postoje interesantni koherencijski rezultati koji proširuju Meklejnove koherencijske rezultate za monoidalne i simetrične monoidalne kategorije na neke druge kategorije sa multiplikacijom (na multiplikativne konjunktivne fragmente supstrukturalnih logika); naime, na relevantne, afine i kartezijanske kategorije.[52] Dalji koherencijski rezultati za intuicionističku i klasičnu logiku mogu se naći u radu *Identity of Proofs based on Normalization and Generality*.[53]

Pored koherencijskih rezultata, jedan od rezultata je i karakterizacija izomorfnih objekata (formula) u nekim kategorijama (deduktivnim sistemima). Izomorfizam između formula trebalo bi da je relacija jača od obične ekvivalencije, tj. od uzajamnog impliciranja. Izomorfizam između formula može se okarakterisati tako što će se gledati spoljašnja struktura u kojoj su formule date. Ta spoljašnja struktura bi mogla da bude deduktivna struktura koja je okarakterisana pomoću kategorija u kategorijalnoj teoriji dokaza. Kategorije koje se koriste su sintaktičke kategorije. Onda se izomorfizam između formula može shvatiti baš kao izomorfizam između objekata u teoriji kategorije, tj. formule A i B su izomorfne kada postoji dedukcija (strelica) f od A do B i dedukcija g od B do A, tako da f komponovano sa g daje dedukciju identiteta od A do A, a g komponovano sa f dedukciju identiteta od B do B. Ova analiza izomorfizma pretpostavlja pojam jednakosti dedukcija koji je formalizovan u sintaktičkim kategorijama.

Razmatranje izomorfnih formula započelo je u intuicionističkoj logici, jer se smatra da imamo zadovoljavajući netrivijalni pojam jednakosti dedukcija u toj logici. Ovaj pojam je okarakterisan ili pomoću računa lambda sa tipovima ili pomoću kartezijanskih zatvorenih kategorija. U ovoj oblasti postoji rezultat za konjunktivno-implikacioni fragment intuicionističke logike, ali problem karakterisanja izomorfnih formula u celom intuicionističkom iskaznom računu još uvek je otvoren. Postoji dalji rezultat karakterisanja izomorfnih formula u analognom multiplikativnom fragmentu linearne logike koji odgovara simetričnim monoidalnim zatvorenim kategorijama, koji je zajednički za klasičnu i intuicionističku linearnu logiku.

Problemom karakterisanja izomorfnih formula klasične iskazne logike još se niko nije bavio i rezultati takozvane beogradske škole kategorijalne teorije dokaza pokrivaju ovu logiku. Oni

52 Petrić Z., Coherence in Substructural Categories, *Studia Logica*, Vol. 70, 2002.

53 Došen K., Identity of Proofs based on Normalization and Generality, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, 2003.

pokrivaju takođe i fragment klasične linearne iskazne logike. Da bi se prišlo ovom problemu, potreban je za logike o kojima je reč netrivijalan pojam jednakosti strelica u kategorijama koje formalizuju pojam jednakosti dedukcija u tim logikama. Ovaj pojam jednakosti, koji je u saglasnosti sa Gencenovom procedurom eliminacije sečenja za pluralne sekventne sisteme modifikovane dodavanjem dva nova principa: unije dokaza i nula dokaza, motivisan je uzimanjem opštosti dokaza kao kriterijuma jednakosti za dokaze.[54] Kategorija koja „radi“ za klasičnu iskaznu logiku je pomenuta netrivijalna Bulova kategorija Došena i Petrića. Do te kategorije dolazimo ako ne zahtevamo da Bulove kategorije budu kartezijanske zatvorene kategorije, i jednakost dedukcija u ovim kategorijama zasnujemo na koherencijskim rezultatima analognim onim za klasičnu linearnu iskaznu logiku.[55] Ove karakterizacije su takve da lako vode proceduri odlučivosti za izomorfizme o kojima je reč.

Filozofski zanimljivo i važno pitanje *kada dva iskaza znače isto*, može se onda analizirati pozivanjem na kriterijum identiteta dedukcija. Odnosno, može se reći da je *A* isti iskaz kao i *B* ako i samo ako su *A* i *B* izomorfni.[56] To je potpuno u saglasnosti sa tim kako teorija kategorija shvata identitet između objekata. Da su dve formule izomorfne intuitivno znači da se ponašaju isto u dedukcijama: komponovanjem uvek možemo proširiti dedukcije u kojima se javlja jedna od njih, bilo kao premisa bilo kao zaključak, do dedukcija u kojima se javlja druga tako da ništa nije dobijeno niti izgubljeno. Vidimo da je kategorijalna teorija dokaza zanimljiva i sa filozofske tačke gledišta: identitet iskaza zasnovan je na identitetu dedukcija, koji je kodifikovan jednakošću između strelica. Ovakvom analizom sugerisana je primarnost akta dedukovanja u odnosu na akt tvrđenja, što je još jedno filozofsko pitanje od ogromnog značaja. Poznato je da je isticanje akta tvrđenja kao primarnog (u redosledu objašnjenja, ne u redosledu učenja jezika), u odnosu na akt referiranja, potpuno promenilo perspektivu iz koje se gledalo na jezik i ono što konstituiše ispravnu analizu različitih segmenata jezika i jezičke prakse. Posle Fregea, koji je prvi istakao iskaz kao osnovnu jezičku jedinicu, značenje reči uglavnom se određuje ukazivanjem na način na koji reč doprinosi značenju rečenice, a ne time za šta reč stoji.

54 Došen K. i Petrić Z., Generality of proofs and its Brauerian representation, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 68, 2003.

55 To su rezultati analogni rezulatima iz: Kelly G. M. i Mac Lane S., Coherence in closed categories, *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 1, 1971, za simetrične monoidalne zatvorene kategorije.

56 Za ovakvu sugestiju videti recimo: Došen K., Identity of Proofs based on Normalization and Generality, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, 2003.

Važni rezultati u kategorijalnoj teoriji dokaza kod nas vezani su za modelske kategorije. Predstavljene su različite kategorije koje služe kao modeli za sintaktičke kategorije, tj. u kojima se date sintaktičke kategorije mogu verno predstaviti. Ovakvi modeli pripadaju semantici dokaza, a ne uobičajenoj semantici iskaza. Potpunost s obzirom na modelsku kategoriju može dati sredstva za rešenje problema odlučivosti. Jedna takva kategorija koja služi kao model sintaktičkih kategorija, jeste kategorija *Rel*,[57] čije su strelice binarne relacije između konačnih ordinala, a kompozicija je kompozicija relacija. Ova kategorija se koristi u pomenutim koherencijskim rezultatima. Kategorija koja može da zameni kategoriju *Rel* je kategorija čiji su objekti konačni ordinali, a strelice relacije podeljene ekvivalencije.[58]

Ako hoćemo da govorimo o dedukcijama, a ne samo o mogućnosti dedukovanja jednih istina iz drugih, jezik teorije kategorija je za to najpogodniji. Kodiranjem dokazivih sekvenata strelicama kategorije, čine se opipljivijim stvari koje razmatra Gencenova teorija dokaza. Kategorijalnim aparatom možemo precizno i lako izraziti kada su dve dedukcije jednake. Ispostavilo se da je ova jednakost dedukcija, koja se u opštoj teoriji dokaza nastojala izraziti redukcijama eliminacije sečenja i normalizacije, povezana sa važnim pojmom teorije kategorija, adjunkcijom. U kategorijalnoj teoriji dokaza imamo više od moćne tehnike kao što je eliminacija sečenja; imamo i objašnjenje zašto je ova tehnika uspešna.

LITERATURA:

Badesa C., *The Birth of Model Theory: Löwenheim's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives*, Princeton University Press, Princeton 2004.

Berry J. W., Almost recursively enumerable sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 164, 1972.

Borisavljević M., Doctoral dissertations in logic from *Virtual Library* of the Faculty of mathematics in Belgrade, *Review of the National Center for Digitization*, Vol. 16, 2010.

Carpentier A., Creative sequences and double sequences, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 9, 1968.

Church A., An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, Vol. 58, 1936. [Preštampano u: Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions,*

57 Došen K. i Petrić Z., *Proof-Theoretical Coherence*, College Publications, London 2004.

58 Došen K. i Petrić Z., A Brauerian representation of split preorders, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 49, 2003, kao i Došen K. i Petrić Z., Syntax for split preorders, *Annals of Pure and Applied Logic*, u štampi.

Unsolvable Problems and Computable Functions, Raven Press, New York 1965.

Cleave J. P., Creative functions, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, Vol. 7, 1961.

Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York 1965.

Došen K., Logical constants as punctuation marks, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 30, 1989.

Došen K., Modal translations in substructural logics, *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 21, 1992.

Došen K., Deductive Completeness, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 2, 1996.

Došen K., Identity of Proofs based on Normalization and Generality, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, 2003.

Došen K., Models of deduction, in: Proceedings of the Workshop “Proof-Theoretic Semantics, Tuebingen 1999”, *Synthese*, eds. Kahle R. and Schroeder-Heister P., Vol. 148, 2006.

Došen K. i Petrić Z., A Brauerian representation of split preorders, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 49, 2003.

Došen K. i Petrić Z., Generality of proofs and its Brauerian representation, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 68, 2003.

Došen K. i Petrić Z., *Proof-Theoretical Coherence*, College Publications, London 2004.

Došen K. i Petrić Z., Syntax for split preorders, *Annals of Pure and Applied Logic*, u štampi.

Ferreiros J., *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel 2007.

Frege G., *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Louis Nebert Verlag, Halle 1879.

Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schließen I, *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 39, 1934. [U prevodu na engleski jezik objavljeno u: Szabo M. E., *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam 1969]

Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schließen II, *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 39, 1935. [U prevodu na engleski jezik objavljeno u: Szabo M. E., *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam 1969]

Gentzen G., Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, Vol. 112, 1936. [U prevodu na engleski jezik objavljeno u: Szabo M. E., *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam 1969.

Gentzen G., Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, Vol. 119, 1943. [U prevodu na engleski jezik objavljeno u: Szabo M. E., *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam 1969]

Goodstein R. L., *Recursive number theory: A development of recursive arithmetic in a logic-free equation calculus*, North-Holland, Amsterdam 1957.

Gödel K., Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38, 1931. [U prevodu na engleski jezik objavljeno u: Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York 1965]

Kelly G. M. i Mac Lane S., Coherence in closed categories, *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 1, 1971.

Kleene S. C., General recursive functions of natural numbers, *Mathematische Annalen*, Vol. 112, 1936. [Preštampano u: Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York 1965]

Kleene S. C., Recursive predicates and quantifiers, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 53, 1943. [Preštampano u: Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York 1965]

Lawvere F. W., Adjointness in foundations, *Dialectica*, Vol. 23, 1969.

Löwenheim L., Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen*, Vol. 76, 1915.

Mijajlović Ž., Marković Z. i Došen K., *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1986.

Myhill J., Creative sets, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, Vol. 1, 1955.

Payne T. H., Sequences having an effective fixed-point property, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 165, 1972.

Payne T. H., Effective extendability and fixed points, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 14, 1973.

Petrić Z., Coherence in Substructural Categories, *Studia Logica*, Vol. 70, 2002.

Post E., Finite Combinatory Processes. Formulation I, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 1, 1936. [Preštampano u: Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York 1965]

Prawitz D., Ideas and results in proof theory, in: *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, eds. Fenstad J. E., North-Holland, Amsterdam 1971.

Prawitz D., The philosophical position of of proof theory, in: *Contemporary Philosophy in Scandinavia*, eds. Olson R.E., The John Hopkins Press, 1972.

Putnam H., Peirce the Logician, *Historia Mathematica*, Vol. 9, 1982.

Quine W. V. O., *The Methods of Logic*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1966.

Rogers H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New York 1967.

Smullyan R. M., *Theory of formal Systems*, Princeton University Press, Princeton 1961.

Sobociński B., On the propositional system A of Vučković and its extension I, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* Vol. 5, 1964.

Szabo M. E., *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam 1969.

Turing A., On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series*, Vol. 42, 1936. [Preštampano u: Davis M., *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press, New York 1965]

Vakarelov D., Logic in Central and Eastern Europe: Balkan Region, in: *Logic and Scientific Methods, Volume One of the Tenth International Congress of Logic Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995*, eds. Dalla Chiara M. L., Kluwer 1997.

Vučković V., Partially ordered recursive arithmetics, *Mathematica Scandinavica*, Vol. 7, 1959.

Vučković V., Rekursive Wortarithmetik, *Publications de l'Institut Mathématique*, Vol. 14, 1960.

Vučković V., Rekurzivni modeli nekih neklasičnih iskaznih računa, *Filozofija*, Vol. 4, 1960.

Vučković V., Einführung von $\Sigma_f(x$ und $\Pi_f(x)$ in der rekursiven Gitterpunktarithmetik, *Doklady Bolgarskoj Akademija Nauk*, Vol. 6, 1962.

Vučković V., On some possibilities in the foundations of recursive arithmetics of words, *Glasnik Matematičko-Fizički i Astronomski* (*Series II*), Vol. 17, 1962.

Vučković V., Filozofski aspekti istraživanja o osnovama matematike, *Filozofija*, Vol. 1, 1963.

Vučković V., Creative and weakly creative sequences of r.e. sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 18, 1967.

Vučković V., Almost recursive sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 23, 1969.

Vučković V., Local recursive theory, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 14, 1973.

Vučković V., Recursive and recursively enumerable manifolds I, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 18, 1977.

Vučković V., Recursive and recursively enumerable manifolds II, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 18, 1977.

Miloš Adžić i Senka Milošević
University of Belgrade, Faculty of Philosophy - Philosophy Department,
Belgrade Serbian Academy of Sciences and Arts, Institute of Mathematics,
Belgrade

ALGORITHMS, CATEGORIES AND PROOFS: SOME TOPICS IN MODERN SERBIAN LOGIC

Abstract

In this paper we focus on two branches of modern logic, computability theory and proof theory, tracing their development in Serbia from the end of World War II to this day. Owing to the unfortunate set of circumstances, computability theory did not give birth to a school in Serbia. Proof theory, on the other hand, found a base in Belgrade as one of the few places in the world promoting Gentzen's ideas, especially in the field of categorial proof theory which will be our sole interest in this work.

Key words: *modern logic, computability theory, proof theory, categorial proof theory*