PSIHOLOGIJA, UDK 159.9.075
1999, 3-4, 259-276

Alternativna metoda za konfirmativnu analizu semiortogonalnom transformacijom glavnih komponenata

KONSTANTIN MOMIROVIĆ
Institut za kriminološka i sociološka istraživanja, Beograd

GORAN KNEŽEVIĆ
LAZAR TENJOVIĆ
MILIVOJE BOGDANOVIĆ
Filozofski fakultet, Beograd

Predložena je metoda za komponentnu analizu nekog skupa kvantitativnih varijabli izvedenu ortonormalnom transformacijom glavnih komponenata tako da se, pod kriterijumom najmanjih kvadrata, aproksimira neka hipotetska matrica strukture latentnih dimenzija sa proizvoljnim, ali nepoznatim korelacijama. Regresijska matrica za izračunavanje latentnih dimenzija definisana je transformacijom matrice strukture, dobijene Schoenemannovom metodom konfirmativne faktorske analize, u Mahalanobisov oblik. Izvedene su formalne relacije između predložene metode i metoda koje su predložili Schoenemann (1966) i Cvitaš i Momirović (1984) i definisane mere donje granice i apsolutne donje granice pouzdanosti latentnih dimenzija analogne merama koje je predložio Momirović (1996).

Ključne reči: faktorska analiza, konfirmativne metode.

U periodu od 1984. do 1988. godine jedna grupa matematičara, statističara i informatičara, u kojoj su bili Marijan Gredelj, Maja Cvitaš, Nataša Erjavec, Jovanka Radaković, Zlatko Knezović, Janez Štalec, Ksenija Bosnar, Franjo Prot, Nataša Viskić - Štalec i Konstantin Momirović, okupljena oko projekata *Analiza bilinearnih formi* i *Inteligentni sistemi za analizu podataka*, pokušavala je, nezadovoljna ponašanjem većine do tada predloženih metoda za konfirmativnu faktorsku analizu, uključujući i one koje se zasnivaju na analizi struktura kovarijansi ili na rešavanju linearnih strukturalnih jednačina (Mosier, 1939; Green, 1952; Wrigley i Neuhaus, 1955; Hurley i Cattell, 1962; Hendrickson i White, 1964; Digman, 1966; Schoenemann, 1966; Bock i Bargman, 1966; Jennrich i Sampson, 1966; Browne, 1967; 1969; Joereskog, 1966; 1968; 1969; Joereskog i Soerbom, 1979; Gruvaeus, 1970; Lawley i Maxwell, 1971; Mulaik, 1972; McDonald, 1978; Bentler i Weeks, 1980; 1982; Momirović, Gredelj i Štalec, 1977; Gredelj, Štalec i Momirović, 1983), da razvije jednostavne postupke za konfirmativnu faktorsku analizu čije ponašanje ne bi zavisilo od efikasnosti iterativnih numeričkih algoritama za rešavanje eksremizacijskih problema koji nemaju algebarsko rešenje u zatvorenoj formi.

Nakon što su Cvitaš i Momirović (1984) našli vrlo jednostavno algebarsko rešenje problema kose transformacije glavnih komponenata pomoću ortonormalne transformacijke matrice bilo je predloženo nekoliko algoritama za uporednu konfirmativnu i eksplorativnu analizu, pod komponentnim, ali i pod klasičnim faktorskim modelom, koji su se zasnivali na ortonormalnoj transformaciji desnih svojstvenih vektora matrice podataka, reprametrizirane na neki pogodan način, tako da se, pod kriterijumom najmanjih kvadrata, aproksimira neka hipotetska matrica sklopa (Bosnar, Prot, Štalec i Momirović, 1984; Viskić - Štalec, Štalec i Momirović, 1984; Knezović i Momirović, 1986; Momirović, Erjavec i Radaković, 1988) i napisano nekoliko programa kojima su implementirani ti algoritmi (Momirović, Štalec, Brot i Bosnar, 1984; Viskić - Štalec, Štalec i Momirović, 1984; Momirović i Knezović, 1986; Momirović, Erjavec i Radaković, 1987).

Međutim, metodama koje je razvila ova grupa nije bilo moguće, na pogodan način, rešiti problem kose transformacije Prokrustovog tipa ako je hipotetska matrica definisana kao matrica strukture, a ne kao matrica sklopa, jer u tom slučaju rešenje koje su našli Cvitaš i Momirović nije bilo moguće uz iste formalne uslove pod kojima je to rešenje dobijeno. Zbog toga su ostala samo dva izbora: ili da se prihvati ortogonalna solucija definisana ishodom Schoenemannove metode (Schoenemann, 1966), ili da se kosa solucija traži primenom nekog iterativnog numeričkog algoritma (Jenrich i Sampson, 1966; Joereskog, 1968; 1969; Joereskog i Soerbom, 1979; Mulaik, 1972; McDonald, 1978). Kako oba, a posebno prvi, od ta dva izbora nije osobito pogodan kada se radi o analizi realnih podataka, u ovom će radu biti predložena jedna jednostavna metoda za konfirmativnu analizu, sa rešenjem u zatvorenoj formi, koja generira latentne dimenzije koje mogu biti u proizvoljnim korelacijama i onda kada je hipotetska matrica definisana kao matrica strukture hipotetskih latentnih dimenzija sa nepoznatim, dakle ne nužno nultim korelacijama.

Definicije

Neka je **Z** matrica standardizovanih podataka dobijena opisom nekog skupa E od n entiteta na nekom skupu V od m kvantitativnih, normalno ili barem eliptično distribuiranih varijabli. Neka je

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z}^t\mathbf{Z}n^{-1}$$

matrica interkorelacija tih varijabli. Pretpostavimo, da je **R** sigurno regularna matrica, i da se sa sigurnošću može odbaciti hipoteza da varijable iz V imaju sferičnu distribuciju, dakle da su sve svojstvene vrednosti matrice korelacija u populaciji P iz koje je izvučen uzorak E jednake.

Neka je $\mathbf{G} = (g_{jp})$, $j = 1,...,m$; $p = 1,...,k$ neka hipotetska matrica strukture definisana pretpostavljenim koeficijentima korelacije između varijabli iz V i latentnih varijabli iz nekog hipotetskog skupa latentnih varijabli H. Matrica **G** može biti formirana na osnovu nekog matematičkog modela kojim su definisane relacije između varijabli iz H i V, na osnovu rezultata nekog prethodnog istraživanja ili rezultata dobijenih meta analizom serije prethodnih istraživanja, ili prosto na osnovu teorijskih pretpostavki. Naravno, matrica **G** mora biti definisana tako da ispunjava uslov

$$h_j^2 < 1 \ \forall \ h_j^2, \ j = 1,...,m$$

gde su h_j^2 dijagonalni elementi matrice diag ($\mathbf{G}\mathbf{G}^t$), i uslov

$$v_p^2 > 1 \ \forall \ v_p^2, \ p = 1,...,k$$

gde su v_p^2 dijagonalni elementi matrice diag ($\mathbf{G}^t\mathbf{G}$), dakle tako da zaista bude definisana kao neka netrivijalna matrica strukture.

Neka je $\Lambda = (\lambda_p)$, $p = 1,...,k$; $\lambda_p > \lambda_{p+1}$ dijagonalna matrica prvih k svojstvenih vrednosti matrice **R**, i neka je $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_p)$, $p = 1,...,k$; $\mathbf{X}^t\mathbf{X} = \mathbf{I}$ matrica njima pridruženih svojstvenih vektora. Glavne komponente analiziranog skupa varijabli, čiji je broj određen na osnovu hipoteze o broju latentnih varijabli u skupu H, biće vektori matrice

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{X}$$

sa matricom kovarijansi

$$\mathbf{K}^t\mathbf{K}n^{-1} = \Lambda;$$

ako se tako definisane latentne dimenzije standardizuju operacijom

$$\mathbf{L} = \mathbf{K}\Lambda^{-1/2}$$

elementi matrice

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z}^t\mathbf{L}n^{-1} = \mathbf{X}\Lambda^{1/2},$$

dakle korelacije između varijabli i glavnih komponenata biće, istovremeno, i koordinate vektora varijabli u prostoru koga razapinju standardizovani vektori glavnih komponenata. Varijanse standardizovanih varijabli, projiciranih u k - dimenzionalni prostor glavnih komponenata, biće stoga elementi vektora

$$\mathbf{h}^2 = \text{vec diag}\,(\mathbf{H}\mathbf{H}^t) = \text{vec diag}\,(\mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^t);$$

i kako je, očigledno,

$$\mathbf{H}^t\mathbf{H} = \Lambda,$$

analiza glavnih komponenata ne maksimizira samo varijanse tako definisanih latentnih dimenzija, već i korelacije između tih dimenzija i analiziranih varijabli, pa stoga i frakciju varijanse bilo koje varijable iz **Z** projicirane u neki k - dimenzionalni prostor.

Neka je **Q** neka ortonormalna matrica takva da optimizira funkciju

$$\mathbf{HQ} = \mathbf{G} + \mathbf{E} \mid \varepsilon = \text{trag}\,(\mathbf{E}^t\mathbf{E}) = \text{minimum},\ \ \mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}.$$

Schoenemann (1966) je pokazao da se problem svodi na simultano rešenje problema

$$\partial\,\varepsilon\,/\,\partial\,\mathbf{Q} = -2\mathbf{H}^t\mathbf{G} + 2\mathbf{H}^t\mathbf{H}\mathbf{Q}$$

i

$$\partial\,/\,\partial\,\mathbf{Q}\ (\text{trag}\ \theta(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t - \mathbf{I}) = 2\theta\mathbf{Q}$$

gde je θ dijagonalna matrica Lagrangeovih multiplikatora, pa se nakon nešto algebarskih manipulacija dobija da je

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Y}_L\mathbf{Y}_D{}^t$$

ako je bazična struktura matrice skalarnih produkata strukturalnih vektora glavnih komponenata i strukturalnih vektora hipotetskih faktora

$$\mathbf{H}^t\mathbf{G} = \mathbf{Y}_L\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Y}_D{}^t$$

gde je $\boldsymbol{\Sigma}$ dijagonalna matrica nenultih singularnih vrednosti, $\mathbf{Y}_L$ matrica levih, a $\mathbf{Y}_D$ matrica desnih svojstvenih vektora matrice $\mathbf{H}^t\mathbf{G}$ pridruženih nenultim singularnim vrednostima (Schoenemann, 1966; Mulaik, 1972).

Lako se može dokazati, da vredi

Propozicija 1.

Matrica $\mathbf{Q}$ je, pod kriterijumomm najmanjih kvadrata, najsličnija matrici skalarnih produkata strukturalnih vektora glavnih komponenata iz $\mathbf{H}$ i strukturalnih vektora hipotetskih faktora iz $\mathbf{G}$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{H}^t\mathbf{G}$$

od svih matrica $\mathbf{Q}^*$ takvih da je $\mathbf{Q}^{*t}\mathbf{Q}^* = \mathbf{I}$.

Dokaz:

Pod kriterijumom najmanjih kvadrata

$$\delta^2 = \text{trag}\ ((\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{Q})^t(\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{Q}))$$

je mera udaljenosti između matrica $\boldsymbol{\Omega}$ i $\mathbf{Q}$. Ali,

$$(\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{Q})^t(\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{Q}) = (\mathbf{Y}_L\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Y}_D{}^t - \mathbf{Y}_L\mathbf{Y}_D{}^t)^t(\mathbf{Y}_L\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Y}_D{}^t - \mathbf{Y}_L\mathbf{Y}_D{}^t) = \mathbf{Y}_D(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma})^2\mathbf{Y}_D{}^t$$

pa kako je $\mathbf{Y}_D{}^t\mathbf{Y}_D = \mathbf{Y}_D\mathbf{Y}_D{}^t = \mathbf{I}$, to je

$$\delta^2 = \text{trag}\ (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma})^2$$

a kako je trag $\boldsymbol{\Sigma}$ = maximum, to je δ^2 = minimum, što je i trebalo dokazati.

Neka je

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}\mathbf{Q} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q}$$

aproksimacija hipotetske strukturalne matrice $\mathbf{G}$.

Sada je transformacija standardizovanih glavnih komponenata, definisanih vektorima u matrici

$$\mathbf{L} = \mathbf{Z}\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}$$

u latentne dimenzije koje su određene ovom transformacijom definisana operacijom

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{B}(\mathbf{B}^t\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{Q} = \mathbf{Z}\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{Q}.$$

Matrica kovarijansi tih dimenzija je, naravno,

$$\mathbf{V}^t\mathbf{V}n^{-1} = \mathbf{I},$$

ali su te dimenzije ortogonalne samo u prostoru entiteta, ali ne i u prostoru varijabli, jer su skalarni produkti vektora strukturalne matrice

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}^t\mathbf{V}n^{-1} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q}$$

elementi matrice

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^t\mathbf{B} = \mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}$$

koja ne može biti dijagonalna matrica, osim u degenerativnom slučaju $\mathbf{R} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}$. Uočimo, međutim, da se matrica $\mathbf{C}$ dijagonalizuje u bazi koju tvore vektori iz $\mathbf{Q}^t$, jer je

$$\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^t = \mathbf{\Lambda};$$

otuda

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q},$$

$$\mathbf{C}^{1/2} = = \mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q},$$

i

$$\mathbf{C}^{-1/2} = \mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{Q}.$$

Alternativna metoda za konfirmativnu kosu transformaciju

Transformacija bilo koje matrice koja ima puni kolonski rang, pa zbog toga i matrice **B**, u Mahalanobisov oblik definisana je, kako su pokazali Hadžigalić, Bogdanović, Tenjović i Wolf (1994), operacijom

$$\beta = \mathbf{B}(\mathbf{B}^t\mathbf{B})^{-1/2}.$$

Ali, kako je $\mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^t = \mathbf{I}$ i $\mathbf{QCQ}^t = \Lambda$,

$$\beta = \mathbf{X}\Lambda^{1/2}\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^t\Lambda\mathbf{Q})^{-1/2} = \mathbf{XQ}.$$

Propozicija 2.

Matrica β je, pod kriterijumom najmanjih kvadrata, najsličnija matrici **B** od svih matrica β^* takvih da je $\beta^{*t}\beta^* = \mathbf{I}$.

Dokaz:

Kvadrat Euklidske udaljenosti između vektora iz matrica **B** i β je

$$\alpha = \text{trag}\,((\mathbf{B} - \beta)^t(\mathbf{B} - \beta)).$$

No kako je

$$(\mathbf{B} - \beta)^t(\mathbf{B} - \beta) = (\mathbf{X}\Lambda^{1/2}\mathbf{Q} - \mathbf{XQ})^t(\mathbf{X}\Lambda^{1/2}\mathbf{Q} - \mathbf{XQ}) = \mathbf{Q}^t(\mathbf{I} - \Lambda^{1/2})^2\mathbf{Q}$$

to je

$$\alpha = \text{trag}\,(\mathbf{I} - \Lambda^{1/2})^2$$

a kako je trag Λ = maximum $\Rightarrow \alpha$ = minimum.

Budući da je, očigledno,

$$\beta(\beta^t\beta)^{-1} = \beta,$$

ovako definisana matrica sklopa jednaka je regresijskoj matrici za izračunavanje glavnih komponenata transformisanih matricom **Q**. Takve će komponente biti vektori matrice

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{Z}\beta = \mathbf{ZXQ}$$

sa matricom kovarijansi

$$\mathbf{\Phi}^t\mathbf{\Phi}n^{-1} = \mathbf{Q}^t\mathbf{X}^t\mathbf{RXQ} = \mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda Q} = \mathbf{C}.$$

Struktura tih komponenata, definisana njihovim kovarijansama sa varijablama iz **Z** biće

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}^t\mathbf{\Phi}n^{-1} = \mathbf{RXQ} = \mathbf{X\Lambda Q},$$

a njihov sklop

$$\mathbf{P} = \mathbf{SC}^{-1} = \mathbf{X\Lambda Q}(\mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda Q})^{-1} = \mathbf{XQ} = \beta.$$

Propozija 3.

Matrice **P** i **S** su faktorske matrice korelacijske matrice **R**.

Dokaz:

Dokaz je trivijalan, jer je očigledno da je

$$\mathbf{PS}^t = \mathbf{PCP}^t = \mathbf{SC}^{-1}\mathbf{S}^t = \mathbf{X\Lambda X}^t.$$

Neka je

$$\mathbf{D}^2 = \text{diag}\ \mathbf{C}$$

dijagonalna matrica varijansi varijabli iz **Φ**. Ako se ovako definisane latentne dimenzije standardizuju operacijom

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi D}^{-1},$$

u matrici

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Psi}^t\mathbf{\Psi}n^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda QD}^{-1}$$

će biti njihove interkorelacije; uočimo, da **C**, pa stoga ni **M**, ne mogu biti dijagonalne matrice, pa ovako dobijene latentne dimenzije nisu ortogonalne u prostoru entiteta iz E.

Matrica korelacija između varijabli iz V i latentnih varijabli iz Ψ, koja se obično naziva matrica faktorske strukture, biće

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z}^t\Psi n^{-1} = \mathbf{RXQD}^{-1} = \mathbf{X\Lambda QD}^{-1};$$

i kako su elementi matrice **F** ortogonalne projekcije vektora iz **Z** na vektore iz Ψ, koordinate tih vektora u prostoru koga razapinju vektori iz Ψ su elementi matrice

$$\mathbf{A} = \mathbf{FM}^{-1} = \mathbf{XQD}.$$

No kako je

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{D}^2$$

to su latentne dimenzije dobijene ovim postupkom kose u prostoru koga razapinju vektori entiteta, ali ortogonalne u prostoru koga razapinju vektori varijabli iz **Z**; kvadrirane norme vektora tih dimenzija u prostoru varijabli jednake su varijansama tih dimenzija.

Propozicija 4.

Matrice **A** i **F** su takođe faktorske matrice matrice **R**.

Dokaz:

Očigledno,

$$\mathbf{AF}^t = \mathbf{AMA}^t = \mathbf{FM}^{-1}\mathbf{F}^t = \mathbf{HH}^t = \mathbf{X\Lambda X}^t.$$

Zbog toga operacija

$$\mathbf{W} = (w_{jp}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{F}$$

gde je $\bullet$ oznaka Hadamardovog množenja formira matricu čiji redovi sadrže komponente varijansi varijabli koje se mogu pripisati latentnim dimenzijama, a kolone komponente varijansi latentnih dimenzija koje se mogu pripisati varijablama.

Po svojoj jednostavnosti i jasnom algebarskom i geometrijskom značenju i latentnih dimenzija, i identifikacijskih struktura pridruženih tim dimenzijama, ova solucija je, premda konfirmativnog tipa, veoma slična Orthoblique soluciji tipa II dobijenoj pod eksplorativnim modelom komponentne analize. Zbog toga se pouzdanost latentnih dimenzija dobijenih ovom metodom može odrediti na način analogan načinu na koji je Momirović (1996) odredio pouzdanost latentnih dimenzija dobijenih Orthoblique transformacijom.

Neka je $\mathbf{N} = (n_{ij})$; i = 1,...,n; j = 1,...,m neka, dopustimo nepoznata, matrica pogrešaka merenja pri opisu skupa E na skupu V. Tada će matrica pravih rezultata entiteta iz E na varijablama iz V biti

$$\mathbf{T} = \mathbf{Z} - \mathbf{N}.$$

Ako, u skladu sa klasičnom teorijom merenja pretpostavimo da je matrica **N** takva da je

$$\mathbf{T}^t\mathbf{N} = \mathbf{0}$$

i

$$\mathbf{N}^t\mathbf{N}n^{-1} = \mathbf{E}^2$$

gde je $\mathbf{E}^2$ dijagonalna matrica, matrica kovarijansi pravih rezultata biće

$$\mathbf{T}^t\mathbf{T}n^{-1} = \mathbf{R} - \mathbf{E}^2.$$

Pretpostavimo, da su koeficijenti pouzdanosti varijabli iz V poznati; neka je **P** dijagonalna matrica čiji su elementi ρ_j ti koeficijenti pouzdanosti. Tada će varijanse pogrešaka merenja za standardizovane rezultate na varijablama iz V biti baš elementi matrice

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}.$$

Sada će prave vrednosti na nestandardizovanim latentnim dimenzijama biti elementi matrice

$$\Gamma = (\mathbf{Z} - \mathbf{N})\beta$$

sa matricom kovarijansi

$$\Theta = \Gamma^t\Gamma n^{-1} = \beta^t\mathbf{R}\beta - \beta^t\mathbf{E}^2\beta.$$

Prema tome, prave varijanse latentnih dimenzija biće dijagonalni elementi matrice Θ. Na osnovu formalne definicije bilo kog koeficijenta pouzdanosti

$$\rho = \sigma_t^2 / \sigma^2$$

gde je σ_t^2 prava varijansa neke varijable, a σ^2 ukupna varijansa te varijable, dakle varijansa koja uključuje i varijansu pogreške, koeficijenti pouzdanosti latentnih dimenzija, ako su poznati koeficijenti pouzdanosti varijabli iz kojih su te dimenzije izvedene, biće dijagonalni elementi matrice

$$\mathbf{A} = \text{diag}\left((\beta^t \mathbf{R} \beta - \beta^t \mathbf{E}^2 \beta)\mathbf{D}^{-2}\right) = (\alpha_p).$$

Propozicija 5.

$$0 \leq \alpha_p \leq 1 \ \forall \ \alpha_p.$$

Dokaz:

Koeficijenti pouzdanosti definisani na ovaj način mogu poprimiti vrednost 1 samo onda ako je $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, dakle ako su su sve varijable izmerene bez pogreške[1], a vrednost 0 onda i samo onda ako je i $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, dakle ako se cela varijansa svih varijabli sastoji samo od varijanse pogreške merenja, a varijable iz V imaju sferičnu normalnu distribuciju. Jer, ako se cela varijansa svake varijable iz nekog skupa varijabli sastoji samo od varijanse pogreške merenja, onda je nužno $\mathbf{E}^2 = \mathbf{I}$ i $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, pa su koeficijenti pouzdanosti svih latentnih dimenzija jednaki nuli.

Međutim, matrica koeficijenata pouzdanosti $\mathbf{P} = (\rho_j)$ je često nepoznata, pa je nepoznata i matrica varijansi pogreške merenja $\mathbf{E}^2$. Ali, ako su varijable iz V izabrane tako da reprezentiraju neki univerzum varijabli U sa istim poljem značenja, gornja granica varijansi pogreške merenja definisana je elementima matrice

$$\mathbf{U}^2 = (\text{diag } \mathbf{R}^{-1})^{-1}$$

(Guttman, 1945), dakle uniknim varijansama tih varijabli. Zbog toga se, u tom slučaju, donja granica pouzdanosti latentnih dimenzija može proceniti koeficijentima

$$\mathbf{B} = \text{diag}\left((\beta^t \mathbf{R} \beta - \beta^t \mathbf{U}^2 \beta)\mathbf{D}^{-2}\right) = (\beta_p)$$

koji su izvedeni postupkom koji je identičan postupku kojim su izvedeni i koeficijenti iz matrice $\mathbf{A}$ uz definiciju $\mathbf{E}^2 = \mathbf{U}^2$, dakle na isti način na koji je Guttman izveo svoju meru λ_6 .

[1] Ovo je, naravno, sasvim apstraktna mogućnost; u stvari, pod većinom modela u teoriji merenja slučaj da je koeficijent pouzdanosti neke varijable jednak 1 i teorijski je nemoguć.

Propozicija 6.

$$0 \leq \beta_p < 1 \ \forall \ \beta_p.$$

Dokaz:

Koeficijenti iz matrice **B** variraju u rasponu (0,1), ali ne mogu dostići vrednost 1. Jer, ako je **R** = **I**, onda je i $\mathbf{U}^2 = \mathbf{I}$, pa su svi koeficijenti ovog tipa jednaki nuli. Ali, kako $\mathbf{U}^2 = \mathbf{0}$ nije moguće ako je matrica **R** regularna, svi koeficijenti definisani na ovaj način su nužno manji od 1 i tendiraju prema 1 kada unikna varijansa varijabli iz kojih su izvedene latentne dimenzija tendira prema nuli.

Na isti način lako je izvesti i mere apsolutne donje granice pouzdanosti latentnih dimenzija definisanih ovom transformacijom. U tu svrhu, postavimo $\mathbf{E}^2 = \mathbf{I}$. Tada će dijagonalni elementi matrice

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-2} = (\mu_p)$$

biti mere apsolutne donje granice pouzdanosti latentnih dimenzija.

Propozicija 7.

$$\mu_p < 1 \forall \ \mu_p.$$

Dokaz:

Očigledno je da su nužno svi koeficijenti iz matrice **M** manji od 1, i da tendiraju prema 1 kada m, broj varijabli u skupu V, tendira prema beskonačnom, jer tada svaka kvadratna forma matrice **R** tendira prema beskonačnom. Ako je **R** = **I**, onda su, naravno, svi ovi koeficijenti jednaki nuli. Međutim, donja vrednost tih koeficijenata ne mora biti nula, jer je moguće, ali ne za sve koeficijente, da varijansa d_p^2 neke latentne dimenzije bude manja od 1.

Predložena metoda za konfirmativnu analizu formalno je vrlo slična metodi za kosu parsimonijsku transformaciju glavnih komponenata koju je predložio Momirović (1997) i nazvao Oblivaks transformacijom. Zbog načina na koji je definisana tu je metodu pogodno nazvati Oblikon transformacijom. Oblikon transformacija je, takođe, formalno vrlo slična metodi za konfirmativnu faktorsku analizu pod modelom glavnih komponenata koju su predložili Cvitaš i Momirović (1984) i Momirović, Erjavec i Radaković (1988); a kako je izvedena iz postupka koga je Schoenemann (1966) predložio za konfirmativnu analizu ortogonalnom transformacijom glavnih komponenata, umesno je razmotriti formalne relacije

Schoenemannove metode i metode koju su predložili Cvitaš i Momirović sa metodom koja je predložena u ovom radu.

Relacije rezultata dobijenih Oblikon metodom sa rezultatima dobijenim metodom Shoenemanna i metodom koju su predložili Cvitaš i Momirović

Kako je

$$\mathbf{\Psi}^t\mathbf{V}n^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{1/2}$$

a

$$(\text{diag }(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1/2}\mathbf{A}^t\mathbf{B}(\text{diag }(\mathbf{B}^t\mathbf{B})^{-1/2} = \mathbf{C}^{1/2}\mathbf{D}^{-1},$$

to je matrica korelacija latentnih dimenzija dobijenih Oblikon transformacijom i latentnih dimenzija dobijenih transformacijom koju je predložio Schoenemann (1966) jednaka transpoziciji matrice Burtovih koeficijenata kongruencije između matrica sklopa dobijenih tim transformacijama.

Nešto su manje zabavne, ali isto tako jednostavne relacije između rezultata dobijenih Oblikon transformacijom i rezultata dobijenih metodom koju su predložili Cvitaš i Momirović (1984).

Metoda koju su predložili Cvitaš i Momirović je, u stvari, rešenje problema

$$\mathbf{XT} = \mathbf{W} + \mathbf{E} \mid \text{trag }(\mathbf{E}^t\mathbf{E}) = \text{minimum}, \mathbf{T}^t\mathbf{T} = \mathbf{TT}^t = \mathbf{I}$$

gde je $\mathbf{W}$ neka hipotetska matrica sklopa.

Kako je $\mathbf{X}^t\mathbf{X} = \mathbf{I}$, rešenje problema, bez uslova $\mathbf{T}^t\mathbf{T} = \mathbf{TT}^t = \mathbf{I}$, je prosto

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{X}^t\mathbf{W}$$

pa se lako može dokazati da se, uz taj uslov, matrica $\mathbf{T}$ može dobiti transformacijom matrice $\mathbf{T}^*$ u Mahalanobisov oblik, dakle operacijom

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}_L\mathbf{H}_D{}^t$$

ako je bazična struktura matrice $\mathbf{T}^*$

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{H}_L\mathbf{K}\mathbf{H}_D{}^t.$$

Standardizovane latentne dimenzije dobijene tom transformacijom su vektori matrice

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{ZXT\Delta}^{-1},$$

gde je

$$\Delta^2 = \mathrm{diag}\ (\mathbf{T}^t\mathbf{\Lambda T})$$

matrica varijansi nestandardizovanih latentnih dimenzija.

Kako je

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{Z}^t\mathbf{L}_C n^{-1} = \mathbf{X\Lambda T\Delta}^{-1}$$

matrica strukture standardizovanih latentnih dimenzija, a

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{L}_C{}^t\mathbf{L}_C n^{-1} = \mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{T}^t\mathbf{\Lambda T\Delta}^{-1}$$

matrica njihovih interkorelacija, to je matrica sklopa ovako definisanih faktora

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{F}_C\mathbf{M}_C{}^{-1} = \mathbf{XT\Delta}.$$

Stoga je matrica korelacija latentnih dimenzija dobijenih Oblikon transformacijom i metodom koju su predložili Cvitaš i Momirović

$$\mathbf{\Psi}^t\mathbf{L}_C n^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}^t\mathbf{\Lambda T\Delta}^{-1},$$

a matrica Burtovih koeficijenata kongruencije između vektora matrica sklopa dobijenih tim transformacijama prosto

$$(\mathrm{diag}\ (\mathbf{A}^t\mathbf{A}))^{-1/2}\mathbf{A}^t\mathbf{A}_C(\mathrm{diag}\ (\mathbf{A}_C{}^t\mathbf{A}_C))^{-1/2} = \mathbf{Q}^t\mathbf{T}.$$

Nekoliko završnih napomena

U mnogim empirijskim istraživanjima lakše je, ili pogodnije, definisati matricu strukture nego matricu sklopa hipotetskih latentnih dimenzija, a uvek je pogodnije dozvoliti da te dimenzije imaju nenulte korelacije. Zbog toga Oblikon ima bez sumnje širu mogućnost primene od Schoenemannove metode, i bar jednaku mogućnost primene kao metoda koju su predložili Cvitaš i Momirović. Naravno, to je moguće tek nakon programske implementacije, pa će u jednom sledećem radu biti opisan program ZEVZEK koji je gotovo doslovna implementacija predloženog algoritma i naveden jedan numerički primer ponašanja tog programa.

Literaturne beleške

Momirović, K.; Štalec, J.; Prot, F.; Bosnar, K. (1984): SCHOENEMANN: Program za usporednu eksplorativnu i konfirmativnu faktorsku analizu. Programska biblioteka SRCE*SS-MACRO. Zagreb, Sveučilišni računski centar.

Momirović, K.; Knezović, Z. (1986): SPINOZA: A program for confirmative factor analysis of data with excessive amount of error. Programska biblioteka SRCE*GENS-MACRO. Zagreb, Sveučilišni računski centar.

Momirović, K.; Erjavec, N.; Radaković, J. (1987): FFACTOR: Program za usporednu eksplorativnu i konfirmativnu komponentnu analizu. Programska biblioteka SRCE*GENS-MACRO. Zagreb, Sveučilišni računski centar.

Viskić - Štalec, N.; Štalec, J.; Momirović, K. (1984): QUAQUA: Program za kosu transformaciju Prokrustovog tipa pomoću ortogonalnih rotacija. Programska biblioteka SRCE*SS-MACRO. Zagreb, Sveučilišni računski centar.

Reference

Bentler, P. M.; Weeks, D. G. (1980): Linear structural equations with latent variables. *Psychometrika*, **45**, 289-308.

Bentler, P. M.; Weeks, D. G. (1982): Multivariate analysis with latent variables. In P. R. Krishnaiah and L. N. Kanal, *Handbook of Statistics,* **2**. Amsterdam, North Holland.

Bock, R. D.; Bargman, R. E. (1966): Analysis of covariance structures. *Psychometrika*, **31,** 507-534.

Bosnar, K.; Prot, F.; Štalec, J.; Momirović, K. (1984): Algoritam i program za usporedbu eksplorativne i konfirmativne orthoblique faktorske solucije. *Proceedings of 6th International symposium 'Computer at the University'*, 502, 1-15.

Browne, M. W. (1967): On oblique procrustes rotation. *Psychometrika*, **32,** 125-132.

Browne, M. W. (1969): Fitting the factor analysis model. *Psychometrika*, **34,** 375-394.

Cvitaš, M.; Momirović, K. (1984): Note on some properties of oblique Procrustes transformations by orthogonal rotations. *Proceedings of 6th International symposium 'Computer at the University'*, 504, 1-7.

Digman, J. M. (1966): The procrustes class of factor-analytic transformations. *Technical Report*, University of Hawaii.

Gredelj, M.; Štalec, J.; Momirović, K. (1983): An improved algorithm for iterative multigroup method of factor analysis. *Proceedings of 5th International symposium 'Computer at the University'*, 499-502.

Green, B. F. (1952): The orthogonal approximation of an oblique structure in factor analysis. *Psychometrika*, **17,** 429-440.

Gruvaeus, G. T. (1970): A general approach to procrustes pattern rotation. *Psychometrika*, **35**, 493-505.

Hadžigalić, S.; Bogdanović, M.; Tenjović, L.; Wolf, B. (1994): O nekim svojstvima Mahalanobisovih prostora. *Zbornik radova 8 Sekcije za klasifikacije Saveza statističkih društava Jugoslavije*, 99-132. Beograd, Savezni zavod za statistiku.

Hendrickson, A. E.; White, P. O. (1964): A quick method for rotation to oblique simple structure. *British Journal of Statistical Psychology*, **17,** 65-70.

Hurley, J. R.; Cattell, R. B. (1962): The procrustes program: Producing direct rotation to test a hypothesized factor structure. *Behavioral Science*, **7,** 258-262.

Jennrich, R. I.; Sampson, P. F. (1966): Rotation for simple loadings. *Psychometrika*, **31,** 313-323.

Joereskog, K. G. (1966): Testing a simple structure hypothesis in factor analysis. *Psychometrika*, **31**, 165-178.

Joereskog, K. G. (1969): A general approach to confirmatory maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, **34,** 183-202.

Joereskog; K. G.; Soerbom, D. (1979): *Advances in Factor Analysis and Structural Equation Modeling.* Cambridge, Abt Books.

Knezović, Z.; Momirović, K. (1986): Algorithm and program for confirmative factor analysis of data with excessive amount of error. *Proceedings of 8th International symposium 'Computer at the University'*, 507, 1-8.

Lawley, D. N.; Maxwell, A. E. (1971): *Factor Analysis as a Statistical Method.* London, Butterworth.

McDonald, R. P. (1978): A simple comprehensive model for the analysis of covariance structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* **31**, 59-72.

Momirović, K.; Gredelj, M.; Štalec, J. (1977): CRITORAN: Algoritam i program za kriterijski orijentiranu faktorsku analizu. *Informatica 77*, **6**, 109, 1-6.

Momirović, K.; Erjavec, N.; Radaković, J. (1988): Metoda, algoritam i program za za konkurentnu validaciju mjernih instrumenata pod pod konfirmativnim i eksplorativnim modelom komponentne analize. *Primijenjena psihologija*, **9**, 3-4, 157-162.

Mosier, C. I. (1939): Determining the simple structure when loadings for a certain tests are known. *Psychometrika*, **4,** 149-162.

Mulaik, S. A. (1972): *The Foundations of Factor Analysis.* New York, McGraw-Hill.

Schoenemann, P. H. (1966): The generalized solution of the orthogonal procrustes problem. *Psychometrika*, **31,** 1-16.

Viskić-Štalec, N.; Štalec, J.; Momirović, K. (1984): Oblique Procrustes solutions by orthogonal rotations. *Proceedings of 6th International symposium 'Computer at the University'*, 516, 1-8.

Wrigley, C.; Neuhaus, J. (1955): The matching of two sets of factors. *Contract Memorandum Report A-32*, University of Illinois.

Alternative Method for Confirmatory Analysis by Semiorthogonal Transformation of Principal Components

KONSTANTIN MOMIROVIĆ
GORAN KNEŽEVIĆ
LAZAR TENJOVIĆ
MILIVOJE BOGDANOVIĆ

The method has been suggested for component analysis of a set of quantitative variables derived by orthonormal transformation of the main components so that the criterion of the least squares is used for approximation of a hypothetic matrix of a latent dimension structure with arbitrary but unknown correlations. The regression matrix for calculation of the latent dimensions is defined by the structure matrix transformation obtained by Schoenemannžs method of confirmation factorial analysis into the Mahalanobisžs form. The formal relations between the recommended method and methods suggested by Schoenemann (1966) and Cvitas&Momirovic (1984) have been derived while the upper and absolute lower reliability limits of the latent dimensions analog to the measures proposed by Momirovic (1996) have been defined.

Key words: Factor analysis, confirmation methods.

Альтернативный метод для конфирмационного анализа семиортогональной трансформацие й главных компонентов

КОНСТАНТИН МОМИРОВИЧ
ГОРАН КНЕЖЕВИЧ
ЛАЗАР ТЕНЬОВИЧ
МИЛИВОЕ БОГДАНОВИЧ

Предлагается метод компонентного анализа множества количественных переменных, который проведен орфонормальной трансформацией главных компонентов так, что под критерием самых маленьких квадратов аппрокси-мирует некоторую гипотетическую матрицу структуры латентных величин, имеющих произвольные, но неизвестные корреляции. Регрессивная матрица для вычисления латентных величин определяется трансформацией матрицы структуры, полученной методом конфирмационного факторного анализа Шоенмана (Schoenemann), в Махаланобисову форму. Выводятся формальные соотношения можду этим методом и методом, который предложили Шоенман (1966) и Цвиташ, Момирович (1984), и определяются меры нижней границы и абсолютной нижней границы достоверности латентных величин, аналогичные мерам, предложенным Момировичем (1996).

Ключевые слова: факторный анализ, конфирмационные методы.