THEORIA 2 UDK 510.22:164(049.32) ; 14 Потер M.(049.32)
BIBLID 0351–2274 : (2010) : 53 : p. 127–132 Kritički osvrt
Book Review

Miloš Adžić

FILOZOFSKA TEORIJA SKUPOVA

Michael Potter, *Set Theory and Its Philosophy: A Critical Introduction,* Oxford University Press, Oxford, 2004, 360pp.

Teorija skupova je veoma apstraktna matematička disciplina i često nije nimalo lako stvoriti jasnu predstavu o objektima kojima se ona bavi. Ovo je posebno slučaj kada je reč o beskonačnim skupovima najrazličitijih vrsta kojima ova teorija obiluje. Kao ispomoć intuiciji matematičari, kao i filozofi, često pribegavaju iterativnoj koncepciji skupa.

Šta je to iterativna koncepcija skupa? Poslužimo se sledećim primerom. Počevši od proizvoljnog skupa, možemo iterirati operaciju partitivnog skupa. Tako, primera radi, ukoliko nam je dat skup ω, primenom operacije partitivnog skupa dobijamo skup $\wp(\omega)$. Ukoliko na ovaj skup primenimo operaciju partitivnog skupa, dobijamo skup $\wp(\wp(\omega))$ itd. Ovo nam daje hijerarhiju skupova:

$$\omega, \wp(\omega), \wp(\wp(\omega)), \wp(\wp(\wp(\omega))),...$$

U ovom konkretnom slučaju pošli smo od skupa ω mada bilo koji skup može zauzeti njegovo mesto. Pošavši od ω, čini se kao da smo zaboravili da pođemo "od početka". Pođimo dakle od $\varnothing$ i pogledajmo kako u ovom slučaju izgleda hijerarhija koju smo opisali gore. U ovom slučaju, potrudićemo se da skupove imenujemo na neki jasan način. Prvih nekoliko nivoa ove hijerarhije jesu

$$V_0 = \varnothing, V_1 = \wp(\varnothing), V_2 = \wp(\wp(\varnothing)),...$$

Nakon svih konačnih nivoa dolazi prvi granični nivo, ω, na kom imamo skup $V_\omega = \cup_{n<\omega} V_n$. U ovaj skup smo sakupili sve skupove koji se javljaju na nivoima pre njega. Sada smo u poziciji da ponovo primenimo operaciju partitivnog skupa što nam daje

$$V_{\omega+1} = \wp(V\omega), V\omega+2 = \wp(V\omega+1),...$$

I tako do sledećeg graničnog nivoa $\omega+\omega$ i skupa $V_{\omega+\omega} = \bigcup_{n<\omega} V_{\omega+n}$. Korake ove procedure, naravno, možemo i dalje iterirati prelazeći na sve veće i veće skupove. Da nećemo ostati bez nivoa garantuje nam klasa svih ordinala *Ord*. Recept je jasan, za svaki ordinal α:

$V_0=\emptyset$,

$V_{\alpha+1}=\wp(V_\alpha)$,

$V_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha$, za granični ordinal β.

Kao rezultat iteracije prethodne procedure *ad infinitum* dobijamo $V=\bigcup V_\alpha$ za svaki ordinal α. Iako je, za svaki ordinal α, V_α skup, V je nasuprot tome prava klasa. Ova klasa naziva se još i univerzumom skupova. Tako ZFC teorija skupova dokazuje da svaki skup pripada V_α, za neki ordinal α.

Ovako izgrađen univerzum skupova V naziva se kumulativnom[1] (ili fon Nojmanovom) hijerarhijom. Ideja koja pokreće ovu konstrukciju, da sve skupove možemo raslojiti po nivoima kao stupnjevima njihove izgradnje počevši od praznog skupa, jeste iterativna koncepcija skupa.

Istorijski izvori ove ideje nisu potpuno jasni. Hao Vang, primera radi, tvrdi da se ova ona može naći već kod Kantora.[2] Sasvim je sigurno da su je Cermelo[3] i fon Nojman[4] jasno razumeli, kao i da se neki njeni aspekti mogu naći kod već Mirimanova. Još jedan značajan podsticaj njenom stvaranju pružila je i Raselova teorija tipova. Međutim, centralno mesto u ukazivanju na značaj ove koncepcije kao i na njeno približavanje širim krugovima *logičke* zajednice svakako pripada Gedelu. Gedelov rezultat o konzistentnosti hipoteze kontinuuma i aksiome izbora sa aksiomama ZF teorije skupova, iako u izvornom obliku formulisan u kontekstu razgranate pre nego proste hijerarhije, učinio je mnogo da matematičarima približi ideju o skupovima koji žive u dobro zasnovanoj kumulativnoj hijerarhiji.

Široj *filozofskoj* javnosti, pak, ovu ideju je predstavio Džordž Bulos.[5] Ono što je u filozofskom smislu zanimljivo u vezi ove ideje može se grubo podeliti na dva aspekta. Prvi, ontološki, aspekt jeste da nam, ukoliko prihvatamo nešto nalik pla-

1 Hijerarhija je kumulativna jer, za proizvoljne ordinale α i β takve da je $\alpha\leq\beta$, imamo da važi $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

2 H. Wang, "The concept of set", in: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings, second edition*, ed. by P. Benacerraf and H. Putnam, Cambridge University Press, 1983, str. 530-570.

3 E. Zermelo, "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", *Fundamenta mathematicae,* Vol. 16, 1930, str. 29–47.

4 J. von Neumman, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* Vol. 154, 1925, str. 219–240.

5 G. Boolos, "The iterative conception of set", *Journal of Philosophy*, Vol. 68, No. 8, 1971, str. 215-231.

tonizmu po pitanju matematičkih objekata, iterativna koncepcija skupa pruža opis "sveta" ili univerzuma skupova. Ona nam pomaže da bolje razumemo stvarnost o kojoj nešto tvrdimo unutar našeg aksiomatskog sistema.[6] Drugi, u ovom kontekstu važniji, aspekt iterativne koncepcije skupa jeste uloga koju ona, ukoliko je prihvatimo, može imati u motivaciji aksioma teorije skupova.[7] Iako su aksiome ZF(C) teorije skupova delom nastale kao odgovor na probleme izazvane paradoksima u osnovama matematike, u ovom novom svetlu ih možemo razumeti kao nešto što pruža opis naših V_α. Ovo, međutim, nailazi na izvesne teškoće. Čak iako iz konstrukcije našeg univerzuma V odstranimo pozivanje na operacije partitivnog skupa i unije i zamenimo ih nejasnijom operacijom "skup od" koja bi trebalo da pokrije oba slučaja, ordinali i dalje ostaju. Kako je jedna od osnovih motivacija teorije skupova bila da se razumeju transfinitni brojevi, ordinali i kardinali, izgleda da ukoliko želimo da razumemo teoriju skupova neophodno je da imamo prethodno razumevanje transfinitnih ordinala, a da bi njih razumeli neophodna nam je teorija skupova.

Međutim, postoji način da izađemo iz ovog kruga. Skot je, primera radi, pokazao[8] da za izgradnju kumulativne hijerarhije nije nužno postulirati ordinale. On je uveo pojam "parcijalnog univerzuma" da njime označi naše skupove V_α, kao i relaciju "raniji od" između parcijalnih univerzuma. Tako, za parcijalne univerzume V' i V", V' je raniji od V" ako i samo ako V'∈V". Pored toga, Skot dozvoljava i postojanje individua koje nisu skupovi (takozvani urelementi). Međutim, ovo nije jedino što Skotovu teoriju čini nestandardnom.

Pored standardnih *aksioma ekstenzionalnosti* i *separacije*, Skot je formulasao još dve aksiome i to: *aksiomu akumulacije* koja kaže da su elementi parcijalnih univerzuma elementi ili podskupovi ranijih parcijalnih univerzuma, kao i *aksiomu restrikcije* koja kaže da je svaki skup podskup nekog parcijalnog univerzuma. Na osnovu ove četiri aksiome Skot je zatim dokazao da su parcijalni univerzumi dobro uređeni, da su svi skupovi dobro zasnovani, kao i da svaki skup ima partitivni skup. Na kraju, Skot je unutar svoje aksiomatizacije uspeo da izvede sve standardne aksiome ZFC teorije skupova sem *aksioma zamene*, *beskonačnosti* i *izbora*.

6 Čini se da se konstruktivističko gledište u filozofiji matematike ne slaže najbolje sa ovom koncepcijom. Jer, iako je, za svaki prirodan broj n, skup V_n konačan a V_ω po redu beskonačan skup u hijerarhiji, kardinalnosti $\aleph_0$, već sledeći skup $V_{\omega+1}$ je kardinalnosti kontinuuma. Ovo važi u opštem slučaju, kardinalnost skupova $V\alpha$ strogo raste sa ordinalima α. Sa konstruktivističke tačke gledišta, teško je dati smisao nivoima nakon ω.

7 Tako, primera radi, Džozef Šenfild upravo na ovaj način pruža motivaciju za aksiome ZFC teorije skupova u svom poznatom udžbeniku iz matematičke logike: J. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

8 D. Scott, "Axiomatizing Set Theory", in: *Axiomatic Set Theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XIII, Part II,* ed. by T. Jech, American Mathematical Society, 1974, str. 207-214.

Ovo nas dovodi do pozicije sa koje Poter piše svoju knjigu. Poter usvaja Skotovu aksiomatizaciju, na nekim mestima je dodatno pojednostavljuje, i na tim osnovama izlaže teoriju skupova koja ima čvrstu filozofsku pozadinu iterativne koncepcije skupa.

Poterova teorija, koju označava sa ZU, je aksiomatska teorija prvog reda koja pored aksioma ekstenzionalnosti i separacije poseduje još dve aksiome: *aksiomu stvaranja*, koja kaže da ne postoji najviši "nivo" (ono što je kod Skota parcijalni univerzum) i aksiomu beskonačnosti, koja kaže da postoji bar jedan granični nivo (najniži od ovih je, naravno, V_{ω}). Pomoću ovih aksioma Poter pokazuje kako je moguće izvesti Skotove aksiome akumulacije i restrikcije. Što se poređenja sa standardnom aksiomatizacijom teorijom skupova tiče, Poterova ZU dokazuje sve aksiome ZFC sem aksioma zamene i izbora.

Knjiga ima četiri dela, koji su dalje podeljeni na poglavlja, kao i tri dodatka. U prvom delu Poter nam pruža pojmovni okvir unutar kog razvija svoju teoriju. Pored veoma instruktivne diskusije o iterativnoj koncepciji skupa, opštih primedbi o prirodi aksiomatskih sistema i pojmu sheme u logici, ovde nalazimo i razmatranje Raselovog paradoksa, kao i razlike između kolekcija i mereoloških suma (fuzija). Centralno mesto ovog dela knjige zauzima Poterovo uvođenje aksioma ZU teorije skupova, kao i motivacija koju navodi njima u prilog. Kao i Skot, Poter dopušta individue koje nisu skupovi iz, kako to kaže, filozofskih razloga koji se tiču primene teorije skupova. Ovo je, naravno, potpuno legitimno. Ukoliko želimo da, služeći se teorijom skupova, govorimo o takvim stvarima kao što su protoni, kvarkovi itd., donekle je bliže intuiciji da za početak posedujemo asortiman individua koji bi trebalo da igra ulogu ovih, ili pak nekih drugih, objekata. Nažalost, Poter o primeni teorije skupova ne kaže ništa.

Drugi deo knjige razvija veliki deo klasične matematike unutar Poterovog aksiomatskog sistema. Tako prvo poglavlje sadrži Dedekindovu konstrukciju strukture prirodnih brojeva, dok se u drugom poglavlju, pored uređenja na prirodnim brojevima, prvi put u ovoj knjizi susrećemo sa kardinalima. Ovo poglavlje sadrži i kratak osvrt na Skolemov paradoks. Treće poglavlje uvodi pojmove racionalne, realne, Suslinove i Bareove linije i po svom karakteru je topološko. U četvrtom i poslednjem poglavlju drugog dela knjige, nalazimo strukture racionalnih i realnih brojeva kao i dokaze njihovih elementarnih svojstava.

U trećem delu knjige Poter razvija aritmetiku kardinala i ordinala. Ovo je, kako je to uobičajeno, praćeno temama dobrog uređenja, transfinitne indukcije i rekurzije, pojma ranga skupa itd. Ono što nije uobičajeno za knjigu ove vrste jeste dokaz Cermelove teoreme o kategoričnosti.

Četvrti i poslednji deo knjige je posvećen raznim ekstenzijama Poterovog aksiomatskog sistema. Ovde Poter razmatra varijantu standardne Levijeve teoreme refleksije u ZFC koju predlaže kao shemu aksioma. Pored refleksije tu su i aksioma zamene kao i *aksiome velikih kardinala* (jake aksiome beskonačnosti). Takođe, u ovom poglavlju se ponovo susrećemo sa kardinalnom aritmetikom ali u sada u prisustvu aksiome izbora. Na kraju, Poter se ukratko osvrće na hipotezu kontinuuma, kao i na *aksiome determinisanosti*.

U prvom dodaku Poter navodi standardne aksiome ZFC teorije skupova dok se u druga dva dodatka još jednom osvrće na razliku između skupova i klasa, problem impredikativnosti itd. Iako aksiomu izbora nije uključio u korpus aksioma svoje teorije, Poter u trećem delu knjige uvodi, znatno slabiju, aksiomu prebrojivog izbora jasno je navodeći prilikom dokaza svakog tvrđenja u kom se koristi. U poslednjem delu knjige Poter uvodi punu aksiomu izbora, dokazujući njenu ekvivalenciju sa Cermelovim principom dobrog uređenja, Hausdorfovim principom maksimalnosti i Zornovom lemom. Aksioma izbora nam, po Poterovom mišljenju, nije nametnuta samom iterativnom koncepcijom skupa, što bi trebalo da objasni neravnopravan status koji ona ima u poređenju sa ostalim aksiomama njegovog sistema. Što se aksiome zamene tiče, ni ona ne pronalazi svoje mesto u sistemu ZU iz sličnih razloga kao i aksioma izbora. Međutim, osim što za aksiomu zamene tvrdi da ne proističe neposredno iz iterativne koncepcije skupa, Poter je takođe smatra suvišnom i u pogledu uloge koju teorija skupova ima kao osnova matematike.

Ovakvo stanovište ima svoju cenu. Budući da u svom aksiomatskom sistemu nema aksiomu zamene, Poter ne može da se osloni na standardnu fon Nojmanovu definiciju ordinala kao tranzitivnih skupova dobro uređenih relacijom. Bez aksiome zamene nismo u stanju da dokažemo da svakom dobro uređenom skupu odgovara jedinstveni ordinal. Takođe, iz istog ovog razloga, nije mu dostupna ni definicija kardinala kao inicijalnih ordinala. Da bi prevazišao ove teškoće, Poter se koristi alternativnom definicijom ordinala (i kardinala) koju dugujemo Skotu, a koja ne zahteva korišćenje aksiome zamene. Kako se definicije transfinitnom rekurzijom takođe oslanjaju na aksiomu zamene, princip transfinitne rekurzije koji Poter dokazuje u ZU znatno je slabiji od standardnog koji je dokaziv u ZFC. Primera radi, u ZU nije moguće definisati aritmetičke operacije na ordinalima standardnim putem tj. transfinitnom rekurzijom, već se one definišu eksplicitno na dobro uređenim skupovima. Nakon toga, neophodno proveriti da ovako definisane operacije zadovoljavaju jednakosti standardne rekurzivne definicije. Nažalost, knjiga ne oskudeva u ovakvim mestima. Sve to čini Poterovo izlaganje komplikovanijim od uobičajenog. Početnicima koji bi želeli da se upoznaju sa teorijom skupova ova knjiga neće pružiti pravu sliku ovog predmeta. Naprotiv, čini se da su njegovi mnogi lepi aspekti zatrpani gomilom, sa matematičke tačke gledišta, suvišnih detalja.

Međutim, iako nestandardna, teorija skupova koju Poter izlaže ima jaku filozofsku motivaciju. Knjiga obiluje zanimljivim filozofskim problemima i argumentima koje autor znalački kontekstualizuje. Osim što je filozofski interesantna, knjiga je pisana sa jakim razumevanjem istorije predmeta kom je posvećena. Što se matematičkog aspekta tiče, i pored svih zamerki, ne nedostaje razloga koji preporučuju ovu studiju. Dokazi su jasni i u velikoj meri potpuni, iako ne uvek najjednostavniji mogući. Izuzetak, nažalost, predstavlja treći deo knjige u kom su neki od dokaza naprosto skicirani. Međutim, i pored toga, nameće se opšti utisak da je Poter je napisao knjigu za koju zaslužuje sve pohvale.

Miloš Adžić
Filozofski fakultet, Beograd