THEORIA 4
BIBLID 0351–2274 : (2011) : 54 : p. 73–92

UDK 510.2 Хинтика J.
Originalni naučni rad
Original Scientific Paper

Radmila Jovanović

REALIZAM U HINTIKINOJ FILOZOFIJI MATEMATIKE

APSTRAKT: *Cilj ovog teksta jeste rasvetljenje nekih od aspekata Hintikine filozofije matematike. U knjizi* The Principles of Mathematics Revisited[1] *i nekoliko naknadnih tekstova u kojima odgovara na kritike i reakcije, Hintika predlaže novi način zasnivanja matematike. Pozicija koju u njima brani je realizam. U ovom tekstu želimo da izložimo u grubim crtama ovaj njegov pokušaj i da prodiskutujemo specifičnost realističke pozicije do koje dolazi.*

KLJUČNE REČI: *Indipendence Friendly Logic, semantika teorije igara, zasnivanje matematike*

Ako se prihvatimo poduhvata zasnivanja matematike, po Hintiki, osnovno pitanje koje treba da postavimo jeste *koja je odgovarajuća logika za matematiku?* Dobar vodič da se na ovo pitanje odgovori jeste pitanje *koja je uloga logike u matematici?* U ispitivanju ovog problema, Hintika pokušava da istakne da je uloga koju logika igra u matematici zapravo višestruka i da su neki od njenih aspekata neopravdano zanemareni. Ono na šta obično mislimo kada govorimo o logici u jednom matematičkom sistemu jeste njena deduktivna uloga kojom se bavimo u teoriji dokaza. Bez obzira da li imamo posla sa interpretiranim ili neinterpretiranim matematičkim sistemom (pitanje interpretacije tiče se ne-logičkih konstanti jezika koji je u pitanju), izvođenja teorema iz aksioma jesu u potpunosti logička. Jedna aksiomatizovana logička teorija otuda služi da osigura relacije povlačenja za svrhu matematičkog sistema, pri čemu možemo da postavimo pitanje da li ove relacije mogu biti potpuno obuhvaćene izračunljivim, rekurzivnim formalnim pravilima. Hintika međutim ističe i druge uloge logike, od kojih je jedna često osporavana, a možda najbitnija – naziva je *deskriptivnom* – a nju obavlja teorija modela ili semantička logika. Ponovo, bez obzira da li se radi o interpretiranom ili neinterpretiranom matematičkom sistemu, logičke pojmove koristimo za analizu značenja samih aksioma, pri čemu je ideja da se značenje matematičkih iskaza određuje preko klase struktura ili modela koja može da im bude dodeljena. Tako za iskaz S određujemo klasu modela M (S), gde je, jednostavno rečeno, M model za S ako i

1 J. Hintika, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996.

samo ako je S istinito u M. Ako pristupamo matematici na ovaj način, preko teorije modela, u prvi plan izbija problem definicije istine za matematičku teoriju. Treća funkcija logike koju Hintika izdvaja jeste njena uloga kao medijuma za aksiomatsku teoriju skupova, ali ova tema neće biti obrađena u ovom tekstu.

U prvi mah, klasična logika prvog reda izgleda kao najbolji kandidat za tri pomenute funkcije logike, sa svim poželjnim logičkim svojstvima koja poseduje – pored toga što je Gedel dokazao njenu potpunost, dokazano je da za nju važe: kompaktnost, teorem separacije, teorem interpolacije, Betov teorem i td. Ali pored ovih pogodnosti, ispostavlja se da klasična logka primenjena na matematiku zapravo pati od čitavog niza problema. Jedan od njih je u tome što pojmovi matematike idu preko onog što je moguće izraziti u jeziku prvog reda. Jezik prvog reda nije dovoljno ekspresivan da bi izrazio pojmove poput *kardinalnosti, dobrog uređenja, funkcija, beskonačnosti, indukcije* i sl. U problem ekspresivnosti jezika prvog reda, spada još jedan bitan problem ove logike – ono što Hintika naziva "prokletstvom Tarskog" – nemogućnost definisanja istine jezika u njemu samom, koju je Tarski dokazao 1933. godine.[2]

Otuda, u bavljenju matematikom, neminovno prelazimo u jezike višeg reda ili u teoriju skupova. Tu međutim, kako Hintika ističe, nailazimo na novi niz problema. Problemi teorije skupova kao baze za matematiku mnogo su diskutovani i široko poznati. Pored paradoksa koji su se pri ovim pokušajima javili, jedan od osnovnih problema jeste nemogućnost rekurzivne enumeracije formula koje su u teoriji skupova istinite, usled čega se mogu javiti formule za koje ne možemo da odredimo da li pripadaju sistemu ili ne. Osim toga u logici višeg reda javlja se problem ontološkog obavezivanja na postojanje skupova, entiteta čiji se status ispostavlja kao sporan, kao i problem kvantifikacije nad neograničenim domenima, gde prestajemo da budemo sigurni u pogledu toga čime baratamo. Otuda bi bilo vrlo poželjno da vezane promenljive imaju za vrednosti isključivo individue, odnosno entitete prvog reda.

S obzirom da Hintika naglašava da je deskriptivna uloga logike u matematici primarna u odnosu na druge, a u pristupu matematici iz ugla teorije modela u prvi plan izbija problem definicije istine, rezultat Tarskog o nemogućnosti definisanja istine jezika u njemu samom predstavlja jedan od ključnih Hintikinih argumenata protiv klasične logike prvog reda. Tarski je pokazao da istina za jezik prvog reda moze da se definiše samo u jačem meta-jeziku, višeg reda. Rezultat Tarskog, međutim, važi samo za formalne jezike koji imaju svojstvo *kompozicionalnosti*, odnosno kod kojih značenje kompleksnog iskaza jeste funkcija značenja njegovih sastavnih delova. Insistiranje na kompozicionalnosti Hintika smatra još jednom

2 A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics, papers from 1923 to 1938*, ed. John Corcoran, Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983. Tarskijev rezultat je blisko povezan sa Gedelovim rezultatom iz 1931.

ustaljenom dogmom[3] i upravo u jednoj nekompozicionalnoj semantici vidi mogućnost za definisanje istine jezika u njemu samom i prevazilaženje problema „prokletstva Tarskog“. Otuda predlaže jednu neklasičnu logiku za matematiku, takozvanu IF logiku (Independence Friendly logic), sa nekompozicionalnom semantikom teorije igara, kojom cemo se u ovom tekstu i baviti. Pre toga, zastaćemo na kratko na pitanju potpunosti deduktivnog sistema, da bismo zaokružili niz Hintikinih razloga za uvođenje nove logike za zasnivanje matematike.

Potpunost deduktivnog sistema

Paralelno sa različitim ulogama logike o kojima možemo govoriti u matematici, možemo govoriti i o različitim vrstama potpunosti deduktivnih sistema. Hintika ih izdvaja više, između ostalih (u njegovoj, ne sasvim uobičajenoj, terminologiji) *semantičku*, *deduktivnu* i *deskriptivnu* potpunost.[4]

Hintiki je stalo da razdvoji različite vrste potunosti deduktivnog sistema i da ukaže da se one odnose na različite stvari.

1. *Semantička* potpunost može da bude svojstvo aksiomatizovanog sistema logike ili nekog njenog fragmenta ukoliko je skup valjanih (logički istinitih) iskaza sistema rekurzivno prebrojiv. Ovo svojstvo takođe možemo da izrazimo tako što ćemo reći da sistem ima potpunu aksiomatizaciju. Klasična logika prvog reda poseduje ovo svojstvo. Ona ima mehanizam (proceduru dokaza) takav da, polazeći od konačnog broja aksioma, dobijamo tačno one rečenice koje su valjane (tj. logički istinite ili istinite u svim modelima). Logika drugog reda ne poseduje svojstvo potpunosti u opisanom smislu.

2. *Deduktivna* potpunost sistema odnosi se na ne-logički deduktivni sistem zajedno sa aksiomatizovanim sistemom logike. Ova potpunost garantuje da, polazeći od datog ne-logičkog sistema, logičkim sredstvima možemo da dokažemo ili istinitost ili lažnost svakog iskaza sistema koji je u pitanju. Gedelov dokaz nepotpunosti aritmetike odnosi se upravo na deduktivni smisao potpunosti sistema – on kaže da uz eksplicitno aksiomatizovanu klasičnu logiku prvog reda (koja sama poseduje semantičku potpunost u smislu koji je prethodno opisan), ne može da postoji nijedna konzistentna aksiomatizacija sistema aritmetike takva da za svaki iskaz Φ, izražen u njenom jeziku, možemo dokazati da važi ili Φ ili ne Φ.

3 J. Hintika, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 1.

4 J. Hintika, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 5.

3. Razdvajanje različitih uloga logike omogućava nam zatim da govorimo o još jednoj vrsti potpunosti koja odgovara deskriptivnoj (a po Hintiki, najbitnijoj ulozi) logike u matematici. Hintika je zove *deskriptivna* potpunost. Ona se odnosi na aksiomatizovani ne-logički sistem i vezana je za pristup deduktivnim sistemima iz ugla teorije modela. Deskriptivna potpunost sistema postoji ukoliko za dati sistem postoji samo jedan model ili – ukoliko se može javiti više modela – ako se može dokazati da među njima postoji izomorfizam. Očigledno, deskriptivna potpunost aritmetike jeste *kategoričnost* u Dedekindovom smislu.[5]

Domašaj Gedelovog rezultata nepotpunosti aritmetike naširoko je diskutovan. Hintika je jedan od mnogih koji smatraju da on zapravo ima ograničeni značaj i to upravo zato što nam razlikovanje različitih uloga logike u matematici i različitih vrsta potpunosti omogućava uvid u ono do čega nam je u deduktivnom sistemu najviše stalo. Za posao zasnivanja matematike, kategoričnost sistema jeste ono do čega nam je najviše stalo jer nam ona omogućava uvid u relaciju između teorije i njenih instancijacija, tj. struktura koje je zadovoljavaju. Logika prvog reda, iako semantički potpuna u prethodno opisanom smislu, ne može da obezbedi kategoričnost aritmetike. Ako ostajemo u nivou jezika prvog reda, ne postoji imunitet za pojavu nestandardnih modela teorije, kao što sledi iz Levenhajm-Skolemovog teorema. Međutim, ako žrtvujemo semantičku potpunost logike koju upotrebljavamo, možda ćemo biti u stanju da obezbedimo željeni izomorfizam među modelima aritmetike. Sve se svodi na uspostavljanje liste prioriteta i na odmeravanje žrtve koju smo spremni da napravimo. I Hintika smatra da pažljivim istraživanjem dolazimo do toga da ono što dobijamo zapravo daleko nadmašuje gubitke. To možemo da uradimo prelazeći u jezik drugog reda ili teoriju skupova, kao što su to činili Dedekind, Peano, Frege i td. Ali iako time dobijamo kategoričnost, uplićemo se u brojne druge probleme koje sa sobom nosi jezik drugog reda, koje smo već pomenuli, a koje Hintika nije spreman da prihvati. Voleli bismo da se nađemo na pola puta između dva: da imamo logiku koja poseduje ekspresivnost logike drugog reda i koja, poput nje, može da nam garantuje izomorfizam među modelima aritmetike, ali sa kojom ćemo u isto vreme ostati u nivou prvog reda kad je reč o entitetima koje prihvatamo, tako da izbegnemo probleme ontološkog obavezivanja. Najzad, treba nam logika koja dozvoljava definisanje istine jezika u njemu samom.

Hintika veruje da je pronašao takvu logiku. Za nju Hintika tvrdi da je logika prvog reda i da poseduje nabrojana prijatna svojstva klasčne logike, osim svojstva semantičke potpunosti. Razlog za nepotpunost je međutim, po Hintiki, mnogo veća ekspresivnost ove logike u odnosu na klasičnu, pa se u neku ruku može posmatrati pre kao prednost nego kao mana. Hintika smatra da je ključni pojam u matematici pojam *materijalne* a ne *logičke* istine. Drugim rečima, zanima nas istina iskaza u

5 Videti R.Dedekind, "What are Numbers and What should they Be?" u *J. Symbolic Logic*, Volume 61, Issue 2 ,1996, str. 688-689.

određenoj strukturi koja predstavlja model, instancijaciju teorije, a ne logička istina ili istina „u svim mogućim svetovima“. Da bismo rečenicu razumeli, zanima nas da znamo kakvo je stanje stvari kada je ona istinita a ne kada je logički istinita. Iako semantički nepotpuna, ova logika može da nas vodi do rezultata kategoričnosti za aritmetiku, a budući da je dovoljno ekspresivna, kao i u logici drugog reda, u njoj mogu biti izraženi svi bitni pojmovi klasične matematike. Nova logika koju predlaže Hintika, trebalo bi da poseduje prednosti obe logike – prvog i drugog reda, a da otklanja njihove mane. Osim toga, Hintika veruje da nam ona omogućava da ispunimo san realista – da matematiku zasnujemo na realistički način. Ova intencija jeste ono što ćemo dalje diskutovati u tekstu. Pre toga, treba da kažemo nešto o novoj logci koja je u pitanju – o takozvanoj IF logici (Independence Friendly Logic) i o semantici teorije igara (GTS – Game Theory Semantics) koju ona zahteva.

IF logika: sintaksa

Sintaktički, IF logika ima sve elemente koje poseduje klasična logika prvog reda. Logički simboli koje koristimo su simboli za negaciju (~), konjunkciju (∧), disjunkciju (∨), egzistencijalni kvantifikator (∃), univerzalni kvantifikator (∀) i zagrade. Ne-logički termini su prebrojivi skupovi simbola za konstante, relacije i funkcije.

Jedina novina koja se u IF logici javlja jeste kosa crta / (slash) koja služi da izrazi nezavisnost egzistencijalnog kvantifikatora ili disjunkcije u odnosu na univerzalne kvantifikatore u čijim se dometima nalaze. Na primer:

1) $\forall x\ (\exists y/\forall x)\ S\ (x,y)$

2) $\forall x\ (\ Sx\ (v/\forall x)\ Rx)$

U klasčnoj logici, jedino sredstvo za izražavanje odnosa među kvantifikatorima jesu zagrade. Ovo po Hintiki predstavlja bitno ograničenje, naročito kada se radi o matematici. Ono što nam je u izvesnom smislu najzanimljivije u logici jeste upravo razumevanje odnosa zavisnosti ili nezavisnosti među kvantifikatorima, pa logika koja omogućava da ove odnose izrazimo ima nesumnjivu prednost.[6] Izražavanje zavisnosti povlači za sobom i potpuno različito razumevanje prirode i značenja kvantifikatora. Egzistencijalni kvantifikator $\exists x$ u formuli $\exists xS(x)$ Frege je interpretirao kao predikat drugog reda koji nam pokazuje da li je predikat S, prvog reda, prazan ili ne. Drugim rečima, formula će biti istinita ukoliko postoji individua b na koju se predikat S primenjuje, takva da je S(b) istinito. Međutim, ovakva inter-

6 Videti J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 3, J. Hintikka, “Intuitionistic Logic as Epistemic Logic” u *Synthese*,volume 127 1-2 april/may 2001.

pretacija, smatra Hintika, nije adekvatna kada se kvantifikator primenjuje na više nego jednomesne predikate, jer se tako gubi uvid u zavisnost među kvantifikatorima, kao u primeru $\forall x \exists y S(x,y)$. Kada imamo ovakvu formulu, postavljeni smo pred dilemu: kada treba da izaberemo vrednost za promenljivu y, da li to činimo poznajući ili ne poznajući vrednost promenljive x ? Ovo Hintika smatra Fregeovom greškom.[7] Logika IF, koja vodi računa o ovim odnosima omogućava da se oslobodi ekspresivnost jezika prvog reda.

Sada skup formula IF logike prvog reda u jeziku L možemo da specifikujemo na sledeći način:

1. Ukoliko je Φ formula prvog reda u negacijski normalnoj formi[8], Φ je formula.

2. Ukoliko je Φ formula u kojoj se egzistencijalni kvantifikator ($\exists$x) nalazi u sintaktičkom dometu izvesnog broja univerzalnih kvantifikatora koji uključuju niz $(\forall y_1),\ldots,(\forall y_n)$, rezultat zamene egzistencijalnog kvantifikatora ($\exists$x) u Φ sa $(\exists x/\forall y_1,\ldots,\forall y_n)$ je formula.

3. Ukoliko je Φ formula u kojoj se disjunkcija ($\vee$) nalazi u sintaktičkom dometu izvesnog broja univerzalnih kvantifikatora koji uključuju niz $(\forall y_1),\ldots,(\forall y_n)$, rezultat zamene simbola za disjunkciju ($\vee$) u Φ sa $(\vee/\forall y_1,\ldots,\forall y_n)$ je formula.

4. Ništa drugo nije formula IF logike.

Osim toga, u logici IF ne javljaju se ideje koje već nisu razumljive u klasičnoj logici prvog reda. Tehnički, IF logika predstavlja konzervativno proširenje klasične logike, odnosno klasična logika je njen specijalni slučaj. Ipak, logika IF ne dopušta potpunu aksiomatizaciju niti semantiku koja poštuje kompozicionalnost, pa na nju definicija istine Tarskog ne može da se primeni.[9]

7 J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 10.

8 Za formulu kažemo da je u negacijski normalnoj formi ukoliko se simbol za negaciju (–) javlja isključivo neposredno ispred atomskih formula.

9 U literaturi se često navodi da je Hodzis dokazao da se za IF logiku može napraviti kompozicionalna semantika. Videti W. Hodges "Compositional Semantics for a Langauge of Imperfect Information," *Logic Journal of the IGPL*, 5, 1997, 539–563. Ovaj rezultat, međutim, nije napravljen za IF logiku, već za nešto različitu verziju logike koja dozvoljava nezavisnost među kvantifikatorima, a koju obično zovemo *slash logic*. Osim toga postoje i bitne modifikacije u Tarskijevoj definiciji istine, zbog čega Hintika odbija da prihvati Hodzisov rezultat. Više o ovome videti u Tulenheimo, Tero, „Independence Friendly Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/logic-if/>.Ono što je za nas bitno jeste da Hintika ističe da je IF logika jedna moćna logika čija semantika *ne mora* da poštuje kompozicionalnost, čak i kada bi jedna kompozicionalna semantika mogla u principu da se za nju da se konstruiše.

Semantika teorije igara GTS (Game Theory Semantics)

Rekurzivna definicija istine kakvu je dao Tarski, koja zadovoljava kompozicionalnost, idući od unutra ka spolja (tj. od atomskih formula ka složenim), oslanja se na pojam valuacije. Istina je relativna prema modelu i funkciji valuacije koja pripisuje jedan entitet određenog tipa svakoj konstanti i promenljivoj u datom jeziku. Ova definicija istine, mora, međutim, da bude izražena u jeziku višeg reda, odnosno u jednom jačem jeziku u kome može da se kvantifikuje nad valuacijama.

Uprkos Tarskom, Hintika smatra da možda možda nije uzaludan pokušaj traženja jedne realističke definicije istine za jezik matematike u njemu samom, ali se to ne može učiniti poštujući kompozicionalnost. Semantička teorija koja pripisuje značenje "od unutra ka spolja" ne može da bude adekvatna za IF logiku. Obrnuti put zato mnogo više obećava – značenja dobijamo kroz semantičku igru između dva igrača, verifikatora i falsifikatora, polazeći od čitave formule pa se "spuštajući" do atomskih formula, čiju istinitost proveravamo u samom modelu. Prema Hintiki, kompozicionalnost, odnosno pripisivanje značenja rečenici „od unutra ka spolja" znači zapravo da se rečenica posmatra nezavisno od konteksta u kome se izriče. Značenje rečenice zavisi samo od značenja njenih sastavnih delova i njene strukture. Drugačija semantika, koja polazi od čitave rečenice dok se ne dostignu njeni osnovni sastavni delovi, omogućava da se uzme u obzir zavisnost od konteksta. [10]

Semantiku teorije igara, GTS (Game Theoretical Semantics) Hintika je predlozio 1968. godine, inspirisan teorijom jezičke igre koju je zastupao Vitgenštajn. Ideja je da reči dobijaju značenja tek u okviru određenih akcija i da se odvojeno od njih ne mogu posmatrati kao smislene. Hintika je naročito zainteresovan za značenje kvantifikatora. Aktivnosti u okviru kojih oni dobijaju značenje posmatra kao traženje i nalaženje objekata (ili "individua-svedoka") koje promenljive vezane ovim kvantifikatorima uzimaju za vrednosti. Ova igra traženja i nalaženja formalizovana je kao *semantička igra* za kvantifikatore.[11]

Semantiku teorije igara, GTS , Hintika smatra najprirodnijom semantikom za IF logiku. U njoj generalno definišemo igru između verifikatora, koji predlaže formulu i pokušava da je odbrani, i falsifikatora, koji igra ulogu "zlog demona" pokušavajući da formulu ospori. Prema definiciji istine koju daje GTS, formula S je istinita u modelu M ako i samo ako postoji pobednička strategija verifikatora u igri G(S) izvedenoj u M, i obrnuto, formula je lažna ako i samo ako postoji pobednička strategija falsifikatora F u igri G(S) izvedenoj u M.

10 Hintikka, J, Sandu, G. "Game-Theoretical Semantics," in *Handbook of Logic and Language*, J. van Benthem, and A. ter Meulen (eds.), Amsterdam: Elsevier,1997. str. 361–410.

11 Hintikka, 1968, "Language-Games for Quantifiers," in *American Philosophical Quarterly Monograph Series 2: Studies in Logical Theory*, Oxford: Basil Blackwell, pp. 46–72

Igra je definisana na sledeći način :

Semantička igra $G(S_o)$ za iskaz S_o počinje sa S_o. Igra se igra u modelu M koji je dat u jeziku L. Kroz razne etape igre, igrači razmatraju ili iskaz S_o ili neki drugi S_1 dobijen kroz igru. Igra se igra uz pomoć precizno definisanih pravila:

(R∨ – pravilo disjunkcije) $G(S_1 \vee S_2)$ (počinje izborom verifikatora za S_i (i= 1 ili 2). Igra se dalje nastavlja kao $G(S_i)$.

(R∧ – pravilo konjunkcije) $G(S_1 \wedge S_2)$ počinje izborom falsifikatora za S_i (i= 1 ili 2). Igra se dalje nastavlja kao $G(S_i)$.

(R∃ – pravilo za egzistencijalni kvantifikator) G(∃xSx) počinje verifikatorovim izborom jednog člana iz domena M za x. Ako je ime individue a igra se dalje igra kao G(Sa).

(R∀ – pravilo za univerzalni kvantifikator) G(∀xSx) počinje falsifikatorovim izborom jednog člana iz domena M za x. Ako je ime individue a igra se dalje igra kao G(Sa).

(R~ – pravilo za negaciju) G(~S) igra se isto kao G(S) osim što igrači menjaju uloge.

(Rat – pravilo za atomske formule) ako je A atomski izraz ili izraz identiteta koji je istinit, verifikator pobeđuje. Ukoliko je izraz lažan pobeđuje falsifikator.

Svaka primena pravila R eliminiše po jednu logičku konstantu, tako da se u konačnom broju koraka dolazi do pravila Rat, tj. pravila za atomske formule.

Istinitost atomskih izraza određuje se u modelu M u odnosu na koji se G(S) igra, što je omogućeno interpretacijom svih ne-logičkih konstanti izraza u tom modelu. Ova interpretacija je sastavni deo modela M i ona daje značenja primitivnim simbolima datog interpretiranog jezika prvog reda.[12]

Očigledno je da je ovo semantika koja značenje termina suštinski ne odvaja od pojma istinitosti. Osim toga, uslovi istinitosti određeni su kroz strategije dva igrača koji pokušavaju da verifikuju, odnosno falsifikuju dati iskaz. Istina se, vitgenštajnovski, definiše upravo preko prakse verifikacije i falsifikacije koje se izvode u okviru datih pravila. Na koji način su uslovi istinitosti povezani sa igrom verifikacije i falsifikacije jasnije nam pokazuje prevod izraza S na jezik drugog reda. Strategije verifikatora možemo odrediti preko konačnog skupa funkcija izbora (odnosno Skolemovih funkcija). Vrednosti ovih funkcija kažu koje individue verifikator mora da izabere u svojim potezima (vezanim za egzistencijalni kvantifikator i disjunkciju) da bi pobedio u igri. Paralelno važi za strategije falsifikatora, vezane za univerzalni kvantifikator i konjunkciju. Očigledno, ove funkcije pripadaju jeziku

12 O GTS videti J. Hintikka,E.Saarinen, *Game Theoretical Sematics: Essays on Semantics*, Doordrech, Holland, 1979.

drugog reda. Uslove istinitosti za S tako možemo da izrazimo u jeziku drugog reda preko prevoda iskaza S na taj jezik. Takvo prevođenje je uvek izvodivo.[13]

Pogledajmo na konkretnom primeru :

1) $\forall x \exists y\ S(x,y)$

Igra počinje falsifikatorovim izborom vrednosti a za x. Zatim verifikator bira vrednost b za y. Dolazimo do atomske formule S (a,b) koju proveravamo u modelu. Ukoliko u njemu S (a,b) važi igru dobija verifikator. Ukoliko ne važi, pobeđuje falsifikator.

Ovaj iskaz je istinit ako postoji pobednička strategija verifikatora, tj. strategija koja kaže verifikatoru kako da izabere y u funkciji vrednosti x-a (f(x)=y), tako da dobije igru. Ako hoćemo da izrazimo postojanje takve strategije, to činimo na sledeći način :

2) $\exists f \forall x\ S(x,f(x))$

Između 1) i 2) postoji ekvivalencija koja zapravo predstavlja varijantu aksioma izbora. U GTS-u, ovaj aksiom proizilazi zapravo iz same definicije istine i po Hintiki, ne može biti diskutovan odvojeno. Hintika se bavi problemom aksioma izbora u mnogim tekstovima.

Sada možemo videti i zašto je GTS najpogodnija semantika za logiku IF. Ona nam dozvoljava da interpretiramo crtu / (slash) kao informacionalnu nezavisnost koju povremeno imamo među kvantifikatorima. Na primer, ako je S formula

$\forall x\ (\exists y/\forall x)\ S(x,y)$

mogli bismo reći da u igri G(S) verifikator bira y nezavisno od falsifikatorovog izbora vrednosti x-a (ne poznajući ga). Hintika vidi Fregeovu grešku pri određivanju prirode kvantifikatora upravo u tome što bi njegova logika bila „igra sa savršenim informacijama“, što nas ograničava u izražavanju mnogih bitnih svojstava, naročito kada se radi o matematici.

U izvesnim slučajevima, crta ne doprinosi ništa što ne bi moglo da se izrazi i bez nje, ali u nekim drugim, omogućava nam da izrazimo strukture koje ne bismo drugačije mogli da izrazimo u logici prvog reda. Klasični primer su Henkinovi granajući kvantifikatori. Formulu

$\forall x \forall z\ (\exists y/\forall z)\ (\exists u/\forall x)\ S(x,y,z,u)$

možemo da predstavimo granajućim kvantifikatorima kao

$$\left.\begin{matrix} \forall z \exists u \\ \forall x \exists y \end{matrix}\right\} S(x,y,z,u)$$

13 J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 3,

ali ne postoji način da ovu formulu linearno predstavimo u logici prvog reda. Promenljiva y treba da zavisi od promenljive x, ali ne i od promenljive z. Promenljiva u zavisi od promenljive z, ali ne i od promenljive x. Pošto je poredak jedini način da u logici prvog reda izrazimo zavisnost među kvantifikatorima (ukoliko u formuli imamo više kvantifikatora, jedan u rangu drugog, promenljiva vezana poslednjim kvantifikatorom je zavisna od svih prethodnih vezanih promenljivih), očito nema takvog poretka koji bi ove uslove mogao da zadovolji.

Najprecizniji način da odredimo nezavisnost među kvantifikatorima jeste preko pojma strategije. Ideja da je kvantifikator ∃y nezavisan od ∀z u prethodnom primeru znači da funkcija strategije verifikatora za egzistencijalni kvantifikator ne sme da uzme za argument prethodni potez falsifikatora za univerzalni kvantifikator. Intuitivno, verifikator bira vrednosti y nezavisno od izabrane vrednosti za z, ali ovakvo određenje nije dovoljno precizno jer kada govorimo o nezavisnosti nemamo na umu jednu izolovanu igru, već uvek mnoštvo igara. [14]

Treba takođe primetiti da u logici IF ne važi zakon isključenja trećeg, ali iz potpuno različitih razloga nego u intuicionističkoj logici. Ovde je nevaženje zakona posledica mogućnosti nesavršenih informacija u igri verifikacije i falsifikacije. Ništa nam ne garantuje da mora da postoji pobednička strategija za jednog od igrača, tako da u slučaju nepostojanja pobedničke strategije, istinosnu vrednost iskaza smatramo za neodređenu. Mogućnost neodređene istinosne vrednosti govori o tome da ne moraju sve vrste funkcija da postoje u modelu, pa utoliko izražava jedno strukturalno svojstvo. [15]

IF logika obezbeđuje mnogo veće ekspresivne mogućnosti u odnosu na klasičnu logiku prvog reda. Ona predstavlja zapravo fragment logike drugog reda koji obično obeležavamo kao $\sum^1_1$- fragment. On se sastoji od formula u formi formi $\exists x_1 \ldots \exists x_n \Psi$, gde su $\exists x_1 \ldots \exists x_n$ kvantifikatori drugog reda, a Ψ formula prvog reda. Između ovog fragmenta i logike IF uvek je moguće prevođenje u oba smera.[16]

Negacija IF i Proširena IF logika

Možda najzanimljiviji momenat semantike teorije igara jeste pravilo za negaciju. Kao što smo videli, ovo pravilo nalaže izmenu uloga igrača u datoj igri. Hintika je naziva *dualnom negacijom*. To je jedna od meta Hintikinih kritičara. Hodzis

14 Videti Tulenheimo, Tero, „Independence Friendly Logic“, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/logic-if/>.

15 Ibid.

16 Ovaj fragment dobija se od logike prvog reda kada se dozvoli egzistencijalna kvantifikacija nad relacijama i simbolima funkcija u formulama prvog reda.

postavlja pitanje opravdanosti pravila dualne negacije s obzirom da igra sa nesavršenim informacijama ne mora uvek da bude određena, tj. za razliku od igre sa savršenim informacijama, gde uvek postoji pobednička strategija jednog od igrača, u igri sa nesavršenim informacijama ovo ne mora da bude slučaj. Ovo je očito razlog zašto zakon isključenja trećeg ne važi u IF logici, kao što smo već naveli. Hodzis ističe da mogućnost neodređenosti igre dovodi u pitanje opravdanost pravila negacije kao zamene uloga igrača pri izboru individua-svedoka u IF logici.[17]

Ova kritika ipak ne deluje tako delotvorna. Dualna negacija ima smisla samo za kompleksne formule u kojima jedino i informacionalna nezavisnost ima smisla. Izmena uloga igrača kod atomskih formula ne postoji, jer njihovu istinitost proveravamo direktno u modelu. Ukoliko se radi o igri sa savršenim informacijama, koja karakteriše klasičnu logiku, dualna negacija se ponaša isto kao i uobičajena, klasična negacija. U igri sa nesavršenim informacijama, dualna negacija ima isto toliko smisla koliko i kosa crta koja indikuje nezavisnost među kvantifikatorima. Ako postavljamo pitanje o njenom opravdanju zapravo dovodimo u pitanje opravdanost uvođenja nezavisnosti među kvantifikatorima uopšte, pa se time gubi iz vida Hintikina osnovna namera. Utoliko je Hintika u pravu kada kaže da pri prelazu na IF logiku, opravdanje dualne negacije zapravo nije ni potrebno.

Ono što je drugi problem, jeste to što se IF logika sa dualnom negacijom još uvek ispostavlja kao nedovoljna za izražavanje svih bitnih matematičkih svojstava (između ostalog, ovako opisana IF logika nije dovoljna da se u njoj formuliše matematička indukcija). Zato Hintika predlaže njenu proširenu verziju koja odgovara širem fragmentu logike drugog reda i koja u pogledu ekspresivnosti potpuno zadovoljava kad se radi o matematici.

Proširena verzija IF logike nastaje razlikovanjem dve vrste negacije : jedna je "dualna" ili "jaka" negacija, koju obeležavamo sa $\sim$, kakva se javlja u običnoj IF logici, a druga, nova, jeste "kontradiktorna" ili "slaba" negacija, $\neg$, koja se može javiti isključivo kao negacija jednog IF iskaza. Semantički, ova negacija ne ponaša se kao ostali veznici, jer za nju ne postoji pravilo u terminima teorije igara. Ono što služi kao semantičko objašnjenje jeste da je iskaz $\neg\varphi$ istinit ako i samo ako iskaz φ nije istinit, drugim rečima ako je on lažan ili neodređen. $\neg\varphi$ znači da ne postoji pobednička strategija verifikatora u igri za iskaz φ. Za razliku od IF logike, u proširenoj IF logici zakon isključenja trećeg važi za kontradiktornu negaciju.

Proširena verzija IF logike sada obuhvata novi, širi fragment logike drugog reda, $\prod^1_1$. Kontradiktorna negacija odgovara iskazu drugog reda u formi $\forall x_1 ... \forall x_n Y$, gde je Ψ formula prvog reda. Sredstva koja sada imamo na raspolaganju je sve što nam je potrebno za izražavanje najbitnijih matematičkih svojstava. Proširena verzija IF logike je striktno jača od neproširene, pa u njoj možemo da izrazimo matematičku indukciju, konačnost domena, dobro uređenje i td. Pri tome,

17 W. Hodges, Logic and games, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2009.

međutim, gubimo neke prijatne teoreme koje važe za običnu IF logiku, kao i za klasičnu logiku prvog reda – kompaktnost, Betov teorem i td. Još jedno bitno svojstvo koje gubimo je mogućnost definisanja predikata istine u samom jeziku. U nastavku teksta ćemo se baviti preispitivanjem Hintikine teze da je IF logika savršeno sredstvo za zasnivanje matematike i to na realistički način.[18]

Pitanje realizma

Ono što je zanimljivo u Hintikinoj filozofiji matematike jeste to što dolazimo do klasičnog modela i prihvatamo celokupnu klasičnu matematiku uz pomoc jedne neklasične logike. Hintika insistira na tome da se ovde radi o realističkom zasnivanju matematike. Mi želimo da razmotrimo neke osnovne Hintikine postavke i da bacimo malo svetla na njegovu specifičnu poziciju po ovom pitanju.

Realizam je širok termin i može se odrediti različito u različitim domenima. U oblasti matematike možemo razdvojiti bar dva načina da govorimo o realizmu. Možemo se pitati o načinu postojanja matematičkih objekata, pa odrediti kao realiste one koji smatraju da ovi objekti postoje nezavisno od naše svesti i kao anti-realiste one koji smatraju da takvi entiteti nezavisno od svesti ne postoje. U drugom smislu, možemo govoriti o realizmu na nivou matematičkih iskaza, pa se možemo pitati da li je istinosna vrednost iskaza određena samim stanjem stvari u svetu, nezavisno od nas, ili zavisi i od nekih drugih faktora. Da li pozicija po pitanju jednog povlači poziju po pitanju drugog, komplikovano je pitanje kojim se ovde ne možemo baviti.

Tradicionalno, realistma se smatraju oni koji prihvataju upravo nezavisno postojanje entiteta višeg reda, dok se anti-realistima smatraju oni koji njihovo nezavisno postojanje ne prihvataju ili drže za sporno. Kao sto smo već naglasili, Hintika ekplicitno odbija ontološko obavezivanje na entitete višeg reda, što predstavlja i jedan od motiva za uvođenje IF logike. U tom smislu, njegov "realizam" ide ruku pod ruku sa nominalizmom, kako on i sam kaže.[19]

O ontološkom statusu samih matematičkih objekata Hintika ne raspravlja eksplicitno. Budući zainteresovan više za strukture izražene u modelima i relacije među entitetima nego za same entitete, rekli bismo da ovaj strukturalistički pristup može da bude neutralan po pitanju načina na koji sami entiteti postoje. Na pojedinim mestima Hintika čak govori o individuama u modelu kao o Hilbertovim

18 Hintika čak smatra da se na izvestan način ovim putem ispunjava program logicizma – svođenja matematike na logiku, mada na specifičan način. Redukcija o kojoj se ovde radi je konceptualna, kao što će se videti u nastavku teksta.

19 J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 10.

pojedinačnim ekstra-logičkim objektima koji su nam direktno dostupni u iskustvu.[20] Hilbert je ove "individue" shvatao upravo kao zapise na papiru.

Ono na čemu Hintika sve vreme insistira jeste određivanje struktura koje zadovoljavaju matematičku teoriju do izomorfnosti – tako da možemo da govorimo o jedinstvenoj strukturi koja čini rečenice teorije istinitim ili lažnim – dakle ako govrimo o realizmu u Hintikinoj filozofiji matematike, to mora biti realizam po pitanju objektivnosti matematičkih iskaza, kome se sada okrećemo.

Razliku između realista i anti-realista u matematici u ovom smislu možemo da tražimo u shvatanju međusobne veze između pojmova istinitosti, značenja i dokazivosti. Za realiste, značenje tvrdnji je fiksirano unapred, sprecifikovanjem istinosnih uslova iskaza, ali tako da ova specifikacija bude nezavisna od naše sposobnosti da prepoznamo konkretne iskaze kao istinite ili lažne. Istinitost nema veze sa našom sposobnošću dokazivanja, već zavisi od toga kakvo je stanje stvari u svetu (nama dostupnom ili ne). Ako govorimo o vezi između istinitosti i dokazivosti, onda možemo da kažemo da samo dokazivost povlači istinitost, ali ne i obratno. Što se tiče veze između istinitosti i značenja, razumeti značenje znači razumeti šta za jednu tvrdnju znači da je istinita tj. koje stanje stvari je čini istinitom – a to razumevanje možemo da imamo čak iako nemamo aktuelnu evidenciju da je tvrdnja istinita. Dakle, specifikovanje istinosnih uslova sačinjava značenje tvrdnje a ovi istinosni uslovi zavise od realnog stanja stvari. Naša sredstva za dokazivanje ovih istinosnih vrednosti je nešto što je sa istinom i značenjem tek indirektno povezano.

Veza između ovih pojmova kod anti-realista je drugačija. Mogli bi smo reći da su pojmovi istinitosti, značenja i dokazivosti u njihovom razumevanju bliskije povezani. Razumevanje značenja tvrdnje direktno zavisi od razumevanja onoga što smatramo za dokaz za tvrdnju. Ko razume tvrdnju, sposoban je da prepozna koja bi matematička konstrukcija bila dokaz za nju. Dakle, za razliku od realista, kod kojih je poznavanje onoga šta se računa kao dokaz tek indirektno izvedeno iz razumevanja same tvrdnje, kod anti-realista je to ono što upravo konstituiše značenje same tvrdnje. S druge strane, postoji intrisična veza između istinitosti i dokazivosti, koja za realiste ne postoji. O istinitosti iskaza možemo da govorimo tek na osnovu evidencije koju posedujemo da je tvrdnja istinita. Otuda, ne možemo da govorimo o istinitim iskazima koje još nismo u stanju da dokažemo – dokaz je upravo ono što konstituiše istinitost iskaza, a značenje tvrdnje je određeno utvrđivanjem ovih istinosnih uslova.

Rukovođeni ovim pojmovnim razgraničenjima, možemo da analiziramo Hintikino stanovište. Značenje iskaza u semantici teorije igara, kao sto sam Hintika

20 Hintika pri tom hvali Hilbertovo ostajanje u nivou individua naspram Fregeovomm i Dedekindovom operisanju opštim pojmovima, videti Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 10.

kaže, neodvojivo je od formulisanja njegovih uslova istinitosti. Istinosne uslove, pak, specifikujemo u terminima pobedničke strategije jednog od igrača u igri koje se igra za dati iskaz. Pokazati postojanje pobedničke strategije u igri za dati iskaz nije ništa drugo do dati dokaz da je dotični iskaz istinit, tako da je zapravo pojam istinitosti neraskidivo povezan sa pojmom dokazivosti.

U odsustvu postojanja pobedničke strategije jednog od igrača (odnosno dokaza ili protiv-dokaza za dati iskaz), kažemo da je istinosna vrednost iskaza neodređena. Koji je status ove neodređenosti? To ne znači da je treća istinosna vrednost postulirana već je ova neodređenost posledica same osnove semantike teorije igara. Hintika, kao što smo već pomenuli, ovaj jaz tumači kao strukturalno svojstvo modela – kao činjenicu da u modelu ne moraju da postoje sve funkcije, kojima izražavamo strategije igrača. Pitanje je ipak šta ovakav odgovor znači za realistu? Kom stanju u svetu odgovara jedna takva rečenica neodređene istinosne vrednosti? Sam Hintika kaže da se ovim pristupom zapravo prevazilazi podvajanje između verifikacionističke i verikondicionalne semantike koje su uspostavili post-vitgenštajnovci, jer bi ona trebalo da predstavlja oba.[21] Ovo, međutim, ne znaci ništa drugo nego čvrsće povezati pojmove dokazivosti, istine i značenja, sto je svakako pre tendencija anti-realista.

Još dalje od toga, Hintika predlaže još jednu modifikaciju sistema koja bi ga učinila konsruktivističkim. [22] Hintika predlaže novu vrstu konstruktivizma koja može mirno da koegzistira sa realizmom. Ovaj konstruktivizam neće se bazirati na promeni pravila koja definišu igru, već na restrikciji u skupu strategija koje su dostupne igračima.[23] Pobedničku strategiju verifikatora u GTS-u izražavamo funkcijom, pa bi konstruktivistički pristup zahtevao da ove strategije priznajemo za postojeće samo ukoliko se efektivno mogu odigrati, tj. funkcije ograničavamo na rekurzivne funkcije. Takvo ograničenje moguće je precizno definisati.[24] Hintikina motivacija za konstruktivistički pristup je epistemološka, pa je tako i formulisana. U krajnjoj liniji, Hintika predlaze da se strategije ograniče na one koje su igračima "poznate", ali ovo ostaje do kraja pojam koji Hintika precizno ne uspeva da odredi. Čak i uz pomenutu konstruktivističku restrikciju, Hintika smatra da zadržava realistički pristup matematici u strogom smislu.

21 Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996. poglavlje 2.

22 Bitno je međutim da Hintika strogo razlikuje konstruktivizam od intuicionizma. Videti Hintikka, "Intuitionistic logic as epistemic logic", *Synthese*, Vol. 127, 1-2, april/may 2001.

23 Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 10, Hintikka,"Intuitionistic Logic as Epistemic Logic" u *Synthese*,volume 127 1-2 april/may 2001. etc

24 Otvoreni problem ostaje da li je u okviru GTS-a takva restrikcija i smislena, naročito kada se radi o konstruktivističkoj varijanti aksiome izbora.

Cilj nam je da pokušamo da razumemo u kom smislu i zašto je ova pozicija specifična. Hintikina tendencija ka realizmu zapravo izgleda ostvarena na atomskom nivou. Kao što smo videli u semantici teorije igara radi se o pristupu „od spolja ka unutra“ – igra za svaku formulu počinje od formule u celini, a onda se spušta do atoma čija se istinosna vrednost proverava direktno u modelu. Istinosna vrednost atomskih rečenica zaista zavisi isključivo od stanja stvari u modelu. Međutim, postoji izvesna asimetrija između atomskog nivoa i kompleksnih formula. Definisanje istine preko pobedničke strategije igrača i pravilo za negaciju doprinose tome da istinosna vrednost kompleksne formule ne zavisi na isti način od stanja stvari u svetu tj. modelu kao što je to slučaj sa atomima. Da bismo ovo potkrepili, dodaćemo nekoliko zapažanja vezanih sa dualnu negaciju i njen specifični tretman u IF logici.

Mogućnost neodređene istinosne vrednosti za kompleksne IF formule – mogućnost pojave jaza, za koji u okviru realizma Hintika zapravo nema adekvatno opravdanje – nastaje usled specifične i vrlo jake negacije koja se javlja u IF logici. Naravno, reč je o dualnoj negaciji. Videli smo da pravilo za negaciju u okviru teorije igara podrazumeva zamenu uloga igrača u igri za dati iskaz. Ova negacija ispostavlja se kao suviše jaka da bi zakon isključenja trećeg mogao da važi. Međutim, bitno je uvideti da nevaženje ovog klasičnog zakona zaista ima drugačije razloge nego što je to slučaj u intuicionizmu. Ukazaćemo na neke od bitnih razlika koje bi mogle da nam budu korisne u ovom ispitivanju.

Kako ističe Dešes u svojoj analizi[25], za razliku od intuicionističke logike, u IF logici važi zakon ukidanja duple negacije $\sim\sim A \rightarrow A$. Dupla negacija znači da se dva puta za redom menjaju uloge igrača u igri, tako da je igra za $\sim\sim A$ identična igri za A. Nevaženje zakona isključenja trećeg dakle ne potiče u IF logici od nevaženja ovog zakona. Drugo, u intuicionističkoj logici, za atomske formule, kao i za kompleksne, ne moramo uvek da imamo dokaz. U IF logici, atomske formule su uvek određene u samom modelu, na klasičan način. Razlog za to je to što se ispred atomskih formula dualna negacija ponaša kao klasična negacija. Dualna negacija se takođe ponaša kao klasična kod svih formula u kojima se ne javlja crta (slash) koja izražava nezavisnost među kvantifikatorima. Drugim rečima u svim formulama klasične logike prvog reda, za koje se ne javljaju igre sa nesavršenim informacijama u semantici teorije igara, ove dve negacije koincidiraju. Ovo dovodi do toga da su igre za klasične iskaze prvog reda uvek determinisane, pa neodređenost istinosne vrednosti ne može da se javi. Što se tiče jaza koji se može javiti u IF formulama u kojima se pojavljuje kosa crta /, on je neizbežan. Kako ističe Dešes, uslovi istini-

25 Dechesne, *Game, Sets, Maths: formal investigations into logic with imperfect informations.* PHD Thesis, Deparment of Philosophy, University of Tilburg, The Netherlands, 2005, str. 49.-50.

tosti i lažnosti formula IF može se formulisati u fragmentu $\sum^1_1$ logike drugog reda, a taj fragment nije zatvoren za klasičnu negaciju.

Otuda za kompleksne formule, gde se javlja mogućnost nesavršenosti informacija, ne važi isti tretman kao za atomske formule. Izgleda kao da je u način baratanja složenim iskazima uključeno nešto više, što prevazilazi uobičajene okvire realističkog tretmana iskaza. Hintika za ovu asimetriju nema naročito objašnjenje.

Kategoričnost i realizam

Sad možemo da razmotrimo ono do čega je Hintiki najviše stalo i onom što smatra glavnim adutom u svom poduhvatu realističkog zasnivanja matematike – svojstvu kategoričnosti aritmetike. IF logika obezbeđuje potpunost aritmetičkog sistema u deskriptivnom smislu, odnosno, garantuje nam njegovu kategoričnost. Utoliko što možemo da dokažemo da postoji izomorfizam među modelima jednog deduktivnog sistema, možemo da govorimo o jedinstvenoj strukturi koja teoriju čini istinitom.

Pitanje koje možemo da otvorimo, međutim, a koje se ne postavlja često, jeste koja je zaista veza između kategoričnosti i realizma. Izgleda da realisti žure da rezultat kategoričnosti prisvoje kao nedvosmisleni argument u korist njihove pozicije. Ova veza međutim nije tako očigledna. U tekstu "Categoricity and Indefinite Extensibility" [26] Volmsli se bavi pitanjem koji je značaj kategoričnosti za realistički pistup zasnivanju matematike. Volmsli ima u vidu kategoričnost Peanove aritmetike izražene u jeziku drugog reda- PA2, odnosno u onom fragmentu logike drugog reda za koji je Hintika pokazao da se može prevesti na jezik proširene IF logike prvog reda (i koji odgovara iskazu kontradiktorne negacije neproširene IF logike). Sada ćemo da iznesemo neke od Volmslijevih rezultata i da zatim pogledamo na koji način se oni reflektuju u Hintikinoj filozofiji matematike.

Volmsli otvara tri problema. Prvi se tiče pitanja da li je rezultat kategoričnosti za realistu uopšte informativan? Jednom kad se dokaže izomorfizam među modelima aritmetike realista žuri da kaze da aritmetika predstavlja studiju *strukture* koju dele svi modeli sistema PA2. Ali zapravo, trebalo bi najpre dokazati da uopšte postoji model PA2, što bi bilo teško uraditi bez opisivanja same strukture prirodnih brojeva. Drugi problem je to što sam rezultat kategoričnosti i dalje ne otkriva da li je jezik o kome se radi dobro izabran jezik za aritmetiku. Treći problem je što kategoričnost takođe ne garantuje da se radi o matematički korisnoj aksiomatizaciji. Postoje aksiomatizacije aritmetike koje teoriju čine kategoričnom ali u kojima

26 Walmsley "Categoricity and Indefinite Extensibility" u *Proceedings of the Aristotelian Society*, New Series, vol 102, 2002. str. 239.- 257.

najprostije aritmetičke činjenice ne mogu biti dokazane, npr. Korkoranova aritmetika.[27]

Što se tiče drugog i trećeg problema, oni ne pogađaju Hintikin sistem. Zadržaćemo se na prvom. Pitanje jeste da li kategoričnost omogućava realisti da pokaže da u datom jeziku svaka rečenica ima određenu istinosnu vrednost i da je ona određena upravo stanjem stvari u svetu tj. modelu? Prema Volmsliju, to je slučaj samo ako realista može da pokaže da postoji model PA2. To bi realista trebalo da učini nezavisno od pozivanja na strukturu prirodnih brojeva. Ono što realista pak radi, jeste da opisuje strukturu prirodnih brojeva, čime upada u krug – jer da bi opisao strukturu prirodnih brojeva i pokazao da ona formira model aritmetike, on mora već da uspostavi da svaka rečenica datog jezika ima istinosnu vrednost, da bi uopšte mogao da definiše istinu aritmetike kao istinu u strukturi prirodnih brojeva.

Način da se iz ovog kruga izađe jeste da se dozvoli postojanje ciljane interpretacije. U tom slučaju svaka rečenica jezika ce biti istinita pod ciljanom interpretacijom, samo ukoliko je logička posledica PA2 (odnosno, ako je istinita u svakom njegovom modelu). Tada kategoričnost omogućava realisti da kaže da je istinosna vrednost svake rečenice jezika određena na osnovu samog modela prirodnih brojeva. Dok se poštuje logika, postoji samo jedna istinosna vrednost koja može biti pripisana svakoj rečenici teorije. Međutim, ovaj rezultat ispunjava san realista u onoj meri u kojoj smo spremni da prihvatimo da su značenja kvantifikatora drugog reda fiksirana. Samo tada rezultat kategoričnosti pokazuje da je svaka rečenica aritmetike određena u sistemu PA2.

Kao što smo već videli, kvantifikaciju nad entitetima drugog reda Hintika smatra spornom. IF logika upravo treba da prevaziđe ovaj problem, tako što svodi kvantifikaciju nad entitetima višeg reda na kombinatorički problem traženja i nalaženja individua prvog reda. Reč "kombinatorički" shvaćena je u specifičnom smislu, tako da se odnosi na kombinatoriku objektima matematičke teorije, a ne formulama. Prednost IF logike sastoji se u ontološkom obavezivanju isključivo na individue prvog reda. Redukcija matematike na IF logiku omogućava nam da se oslobodimo spornih entiteta i prevaziđemo prethodno pomenuti problem koji nosi sa sobom realistička pozicija. U izvesnom smislu, ova redukcija za Hintiku predstavlja čak ostvarenje sna logicista u modifikovanoj i manje ambicioznoj varijanti. Za nju Hintika kaže da se radi o konceptualnoj redukciji koja ne predstavlja prevod matematike na logiku. Govorimo o redukciji jedne aksiomatizovane teorije višeg reda na logiku IF u smislu da klasu struktura koja je realizovana u modelima koji tu teoriju čine istinitom, možemo da zahvatimo pomoću formula proširene IF logike.[28]

27 Corcoran, „Categoricity", History and Philosophy of Logic, 1, 1980,: 187-207.

28 J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1996, poglavlje 10.

U raspravi sa Fefermanom, Hintika agrumentuje da ovakva redukcija jeste prava zasnivačka redukcija.[29] Njom se sva pitanja koja se tiču postojanja entiteta višeg reda svode na pitanja istinitosti ili valjanosti iskaza IF logike. Matematika se ispostavlja ne kao nauka koja se bavi apstraktnim entitetima, već kao istraživanje struktura instanciranih u modelima teorije, koje su sačinjene od individua.

Nekoliko ozbiljnih kritika upućenih Hintiki predstavljaju ipak izazov za njegov entuzijazam. Osnovno pitanje jeste da li je IF logika zaista logika prvog reda. Feferman postavlja Hintiki prigovor da to što IF logika sintaktički ostaje u nivou prvog reda, još uvek ne znači da njena semantika ne podrazumeva entitete višeg reda.[30] Time Feferman dovodi u pitanje Hintikinu polaznu premisu da je jedini kriterijum za utvrđivanje statusa logike pitanje nad kojim entitetima se vrši kvantifikacija. Prema Fefermanu, deskriptivna uloga logike koju Hintika toliko favorizuje u matematici ispostavlja se kao nedovoljna. U matematičkom rezonovanju deduktivna uloga logike neminovno stupa na scenu. Kada se bavimo dokazivanjem teorema bavimo se pitanjem da li su one posledice koje deduktivno slede iz aksioma aritmetike. Uzmimo na primer aksiom aritmetike koji se može prevesti na jezik proširene IF logike. On ima oblik kontradiktorne negacije iskaza A neproširene IF logike, A*. Možemo se pitati da li je iskaz B posledica ovog aksioma, što formulišemo kao pitanje da li je implikacija $A^* \rightarrow B$ valjana,a što je ekvivalentno pitanju da li je valjana formula $\neg A^* \vee B$ neproširene IF logike. Ono što je bitno jeste da se više ne radi o *zadovoljenosti* formule $\neg A^* \vee B$ u modelu, već se radi o *valjanosti* tj. istinitosti u svim modelima. Venen daje argumentaciju da kada se radi o valjanosti jedne ovakve formule, već se obavezujemo na celokupnu logiku drugog reda.[31]

Da bismo utvrdili valjanost jednog iskaza IF logike treba da pokažemo da postoji pobednička strategija Verifikatora u igri koja se igra za dati iskaz *u bilo kom modelu*. Tero Tulenheimo daje primer iskaza $\neg\forall x\exists y\forall z(\exists w/\forall x)\ R(x, y, z, w)$ i postavlja pitanje da li možemo da izbegnemo obavezivanje na entitete višeg reda kada govorimo o njegovoj valjanosti? [32]

29 ibid.

30 Solomon Feferman „What kind of logic is 'Independence Friendly' logic?" u *The Philosophy of Jaakko Hintikka* (Randall E. Auxier and Lewis Edwin Hahn, ed.); Library of Living Philosophers vol. 30, Open Court 2006, 453-469

31 J. Väänänen, "Second-Order Logic and Foundations of Mathematics," *Bulletin of Symbolic Logic*, 7, 2001.str. 504–520.

32 Tulenheimo, Tero, „Independence Friendly Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/logic-if/>.

Naše je mišljenje da je status proširene IF logike sporan, ali iz nešto različitih razloga. Ukoliko prihvatimo da IF logika čini matematičku teoriju kategoričnom, prelazak od zadovoljenosti u modelu na valjanost ne mora da predstavlja naročiti problem. Ako je dokazano da među modelima postoji izomorfizam, možemo ih tretirati kao jedan model – pa dokazivanjem istinitosti u ciljanom modelu, dokazujemo i važenje teoreme u svim modelima via izomorfizam.

Ipak sa ovom i sličnim rečenicama proširene IF logike postoji drugi, bazičniji problem. Izgleda da nam je za razumevanje ovakvih rečenica neophodno razumevanje kvantifikacije nad funkcijama. Kontradiktorna negacija nema tretman u teoriji igara kao ostali veznici – ne postoji pravilo igre koje se na nju odnosi. Jedan iskaz koji počinje kontradiktornom negacijom kao u datom primeru zapravo eksplicitno tvrdi *nepostojanje* pobedničke strategije verifikatora, tj *nepostojanje jedne funkcije*. Razumevanje ove rečenice dakle eksplicitno upućuje na entitete višeg reda uprkos Hintikinoj intenciji da objekt-jezik matematike ne referira na funkcije, skupove i druge entitete višeg reda i da nam oni nisu neophodni za njegovo razumevanje. Kada se radi o ovakvom primeru, ne vidi se kako bi se baratanje entitetima višeg reda svelo na kombinatorički problem traženja i nalaženja individua u modelu.

Ukoliko su kritike poput ovih opravdane- a reklo bi se da one bude sumnju u status IF logike kao logike prvog reda- Hintika se nalazi u nezgodnoj poziciji i kada se radi o njegovoj odbrani realizma u matematici, s obzirom da insistira na realističkoj poziciji koja bi išla "ruku pod ruku sa nominalizmom" i kvantifikaciju nad entitetima višeg reda drži za spornu.

Nakon svega navedenog, realistička pozicija koju Hintika zastupa izgleda specifična ako posmatramo status matematičkih iskaza i sporna kada se radi o entitetima koje u matematici prihvatamo.

Radmila Jovanović
Filozofski fakultet, Beograd

Radmila Jovanović

Realism in Hintikka's Philosophy of Mathematics

(Summary)

In this paper we take a closer look at some aspects of Hintikka's philosophy of mathematics. In his book *The Principles of Mathematics Revisited* and several more recent texts, Hintikka proposed a new foundation of mathematics. He claims that he is defending the realist approach. We will briefly sketch his main arguments and then we will discuss this specific form of Realism.

KEY WORDS: Independence Friendly Logic, *Game-theoretical semantics (GTS), Foundation of mathematics*