THEORIA 3
BIBLID 0351–2274 : (2012) : 55 : p. 33–44

DOI: 10.2298/THEO1203033A
Originalni naučni rad
Original Scientific Paper

**Miloš Adžić**

# *O STRANPUTICAMA NATURALIZMA*

APSTRAKT: *U ovom tekstu cilj nam je da ispitamo neke argumente usmerene protiv naturalizma u filozofiji matematike. Argumenti o kojima je reč formulisani su sa platonističkog stanovišta sa namerom da pokažu da možemo na koherentan način govoriti o sposobnosti matematičke intuicije, koju anatemiše svaka vrsta naturalizma.*

KLJUČNE REČI: *platonizam, naturalizam, matematička intuicija, Frilingov argument.*

Matematički platonizam nije na ceni u savremenoj filozofiji matematike.[1] U poslednjih pola veka, ova pozicija je bivala sve manje favorizovana u odnosu na svoje antirealističke suparnice, iako su je zastupali neki od najvećih umova našeg vremena. Ontologija koju platonizam postulira, postojanje sfere apstraktnih objekata, vodi nas neminovnom epistemološkom pitanju na koje nije nimalo jednostavno pružiti odgovor sa platonističkog stanovišta: kako saznajemo matematičke objekte?

Tvrditi da posedujemo sposobnost matematičke intuicije koja nam omogućava da „opažamo" objekte kakvi su brojevi ili skupovi, neretko izaziva podozrenje u filozofskim krugovima. Sa stanovišta savremene filozofije koja je u svojoj osnovi empiristička, prethodno tvrđenje predstavlja mit. Ukoliko želimo da se bavimo filozofijom matematike, to bi trebalo da činimo tako da je makar u načelu moguće objasniti činjenicu da posedujemo matematičko saznanje. Svako takvo objašnjenje, pretpostavlja se, zahteva makar neku vrstu kauzalne veze. Budući da su, sa stanovišta platonizma, matematički objekti apstraktni i time kauzalno inertni, ova pozicija nije u stanju da objasni na koji način stičemo matematičko saznanje.

## I

Jedan od načina da se suočimo sa prethodnim izazovom jeste da tvrdimo da se matematičko saznanje suštinski razlikuje od empirijskog te da je nametanje em-

1 Ovaj rad izložen je na naučnom skupu „Struktura objašnjenja", održanom 16-17.11.2012. na Filozofskom fakultetu u Beogradu.

pirističkih skrupula matematici u najmanju ruku neprimereno. Ovo dalje otvara put osporavanju premise koju smo gore naveli a na osnovu koje objašnjenje matematičkog saznanja mora uključivati neku vrstu kauzalne veze. Ukoliko ovo učinimo i ukoliko smo u isto vreme u stanju da pružimo koherentno objašnjenje sposobnosti matematičke intuicije koje ide dalje od prostog dogmatskog tvrđenja da ona postoji, čini se da samim tim platonizam postaje pozicija *par défaut* u poređenju sa naturalizmom.

Razume se, ovo nije jednostavno a možda ni moguće učiniti. Ipak, to je zadatak koji je, između ostalih, sebi postavio Džejms Robert Braun (James Robert Brown) u knjizi *Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge*.[2] Ova knjiga ima mnogo toga što je preporučuje filozofskoj publici. Braunova kritika naturalističkih pozicija u filozofiji matematike nosi sa sobom pregršt novih argumenata koje naturalisti kao ni platonisti ne bi smeli da zanemare. Ovaj negativni i značajniji deo Braunove studije upotpunjen je pozitivnim argumentima u prilog platonizma. Po Braunovim rečima, njegov osnovni cilj jeste „da pokaže koliko je nezadovoljavajuća naturalistička pozicija. Ukoliko se u poređenju s njom platonizam čini uspešnijim, utoliko bolje."[3]

Jedna od naturalističkih pozicija u filozofiji matematike kojoj Braun posvećuje pažnju jeste i ona koju zastupa Penelopa Medi[4] (Penelope Maddy) a na osnovu koje se „metodologija matematike može na pravi način procenjivati, braniti ili kritikovati samo na matematičkim ali ne i filozofskim ili ma kojim drugim vanmatematičkim osnovama."[5] Nasuprot ovome, Braun smatra da „postoji pregršt razloga da verujemo (*contra* Medijeve) da neke matematičke metode i rezultati dobijaju svoje opravdanje iz nematematičkih izvora, konkretno iz filozofije"[6], i sebi postavlja kao cilj da pokaže da „postoje putpuno legitimna [filozofska *prim. prev.*] razmatranja koja igraju ulogu svedočanstva u prilog nekih matematičkih rezultata."[7]

Braunov argument je kompleksan i po mnogo čemu originalan. Njegova uspešnost, međutim, ponajviše zavisi od koherentnog objašnjenja fenomena matematičke intuicije. Čitava Braunova studija se može, u izvesnom smislu, razumeti i kao argument u prilog postojanja ove sposobnosti koja je, po njegovim rečima, „sa stanovišta svedočanstva, ekvivalentna empirijskom posmatranju u prirodnim naukama. Ona može biti pogrešiva i ograničenog opsega, ali ona predstavlja ogledno

2 Brown, J. R. *Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge*, Routledge, 2012.

3 Brown, J. R. *op. cit.* p. x

4 Maddy, P. *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, 1997. i *Second Philosophy*, Oxford University Press, 2009. iste autorke.

5 Maddy, P. „How to be a naturalist about mathematics", in Dales G. and Oliveri G. (eds), *Truth in Mathematics*, Oxford University Press, 1998, p. 164.

6 Brown, J. R. *op. cit.* p. 134.

7 Brown, J. R. *op. cit.* p. 134.

polje za spekulativnije [matematičke *prim. prev.*] aksiome. Ova kvazi-percepcija je ono što nam omogućava pristup sferi matematičkih eniteta.[...] Matematička intuicija je stabilna i podložna ponavljanju koliko i čulno iskustvo, verovatno i više od toga."[8]

U ovoj kratkoj belešci nećemo se baviti čitavim Braunovim argumentom usmerenim protiv matematičkog naturalizma niti ćemo razmatrati sve pozitivne argumente koje on iznosi u prilog postojanja matematičke intuicije. Cilj nam je, međutim, da pokažemo da su bar neki od njih nekonkluzivni i da utoliko njegova kritika naturalizma gubi na snazi.[9]

## II

Pre više od četvrt veka Kristofer Friling (Christopher Freiling) je formulisao takozvanu *aksiomu simetrije*[10] i na osnovu nje ponudio „filozofski dokaz" negacije *hipoteze kontinuuma*.[11] Budući da trenutno prihvaćene aksiome Cermelo-Frenkel teorije skupova (u nastavku *ZFC*) ne odlučuju *CH*, postavlja se pitanje kakvi razlozi govore u prilog Frilingove aksiome kao nove aksiome teorije *ZFC*? [12]

8 Brown, J. R. *op. cit*. p. 139.

9 Iako ćemo se truditi da čitaoca ne opteretimo previše tehničkim pojmovima, sama priroda materije nam ne ostavlja mnogo izbora sem da, u pojedinim prilikama, određene pojmove čije su definicije suviše kompleksne da bi se u celosti izložile, ostavimo nedefinisanim. U svakom takvom slučaju, čitaoca upućujemo na: Jech, T. *Set Theory*, Springer, 2006.

10 Freiling, C. „Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 51, no. 1, 1986.

11 Hipoteza kontinuuma (u nastavku *CH*) je tvrđenje: *svaki beskonačan podskup skupa realnih brojeva je ili prebrojiv ili kardinalnosti kontinuuma*. Nakon što je 1874. dokazao da postoji bijekcija između skupa svih prirodnih brojeva i skupa svih algebarskih brojeva, ali i da ne postoji bijekcija između skupova prirodnih i realnih brojeva, nemački matematičar Georg Kantor (Georg Cantor) je otvorio put „višim beskonačnostima" u matematici.
Ono što je Kantor pokazao bilo je da $2^{\aleph_0}>\aleph_0$, gde je $\aleph_0$ kardinalnost skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ dok je $2^{\aleph_0}$ kardinalnost skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. On je zapravo pokazao i više od toga. Naime, ukoliko je $S$ proizvoljan skup, kardinalnost njegovog partitivnog skupa $\wp(S)$ je strogo veća od njegove kardinalnosti. Drugim rečima, za proizvoljan kardinal $\kappa$, imamo da važi $2^{\kappa}>\kappa$. U ovoj notaciji hipoteza kontinuuma glasi: $2^{\aleph_0}>\aleph_1$, gde je $\aleph_1$ najmanji beskonačan kardinal $>\aleph_0$. Svaki put kada u nastavku rada budemo referirali na *CH*, imaćemo u vidu ovu poslednju formulaciju.

12 Hipoteza kontinuuma je zaokupljala Kantorovu pažnju sve do kraja njegove matematičke karijere. Iako nije uspeo da je dokaže ona je dala vetar u leđa njegovoj novostvorenoj teoriji skupova. Hipoteza kontinuuma je pronašla svoje mesto kao prva na čuvenoj listi Hilbertovih (David Hilbert) problema s početka dvadesetog veka, i iako su mnoga velika imena tog perioda, uključujući i Hilberta, pokušavala da sa njom izađu na kraj, prvi značajan pomak u ovom pogledu dogodio se 1938. godine kada je Gedel (Kurt Gödel) dokazao da su *CH* kao i *GCH*

Po Frilingovom mišljenju, njoj u prilog govori simetrija koja se javlja u misaonom eksperimentu koji uključuje bacanje „slučajnih strelica” na kontinuum a koji za cilj ima „sticanje dodatnih intuicija o apstraktnom svetu teorije skupova.”[13] Za razliku od „uobičajenog metoda opravdanja aksioma koji intuiciju o konačnim ili prebrojivim skupovima neoprezno proširuje na sve skupove”[14], Friling predlaže da naše intuicije primenimo neposredno na kontinuum budući da on „stoji u čvrstoj vezi sa stvarnim svetom kao i sa svetom teorije skupova.”[15]

Braun smatra da nam Frilingov „dokaz” nedvosmisleno ukazuje na postojanje matematičke intuicije i time govori u prilog platonizma. Po njegovim rečima „matematički platonizam potkrepljuju primeri ove vrste.[...] Jasno je da ne dokazujemo $\neg CH$ iz trenutno prihvaćenih matematičkih aksioma. Šta više, jasno je i da rezultat nije empirijski, budući da možemo da pogađamo realne brojeve strelicama samo u pojmovnom smislu. Čini se da postoji samo jedno plauzibilno objašnjenje kako Frilingov argument radi: negde usput, platonistička intuicija je bila na delu, što znači da se nijednoj vrsti naturalizma ne piše dobro.”[16] U nastavku ovog odeljka ćemo ispitati Frilingov argument ne bismo li utvrdili da li i u kojoj meri je Braunova ocena tačna.[17]

Frilingova ideja je u osnovi sledeća: ako zamislimo da se „slučajna strelica” baca na $I$ (gde je $I$ jedinični interval $[0,1]$) onda će (gotovo izvesno) promašiti svaki unapred dati broj. Kako se to često dešava kada formalizujemo neku intuiciju, moramo je naknadno oslabiti.

Preliminarna, neformalna verzija Frilingove aksiome tada bi bila sledeća: za svaki realan broj postoji proces bacanja strelice koji će promašiti taj broj. Friling opisuje ovo slabljenje time što kaže da je naša intuicija negde između $\exists\forall$ i $\forall\exists$ pa biramo slabiju verziju što je u ovom slučaju poslednja. Nažalost, sve što ovo opravdava jeste $\forall x \exists y (x \neq y)$.

konzistentne sa aksiomama *ZFC*. Drugim rečima, ako je *ZFC* konzistentna teorija, onda $ZFC \nvdash \neg CH$ i $ZFC \nvdash \neg GCH$. Rezultat koji je komplementaran Gedelovom rezultatu, dokazao je Koen (Paul Cohen) 1963: ako je *ZFC* konzistentna teorija, onda $ZFC \nvdash CH$ i $ZFC \nvdash GCH$. Ova dva rezultata zajedno daju *nezavisnost CH* i *GCH* od aksioma *ZFC*; tj. ukoliko je teorija *ZFC* konzistentna onda ne dokazuje niti *CH* niti njenu negaciju $\neg CH$, i slično tome za *GCH*.

13 Freiling, C. *op. cit.* p. 190.

14 Freiling, C. *op. cit.* p. 190.

15 Freiling, C. *op. cit.* p. 190.

16 Brown, J. R. *op. cit.* pp. 157-158.

17 Primedbe koje ćemo uputiti Frilingovom argumentu nisu nove, neke od njih pojavile su se nedugo nakon što je Frilingov rad objavljen. Za detaljniji prikaz Frilingovog argumenta, kao i kritika koje mu se mogu uputiti, zainteresovanog čitaoca upućujemo na Hauser, K. „What new axioms could not be“, *Dialectica*, vol. 56, no. 2, 2002.

Međutim, moguće je proširiti prethodni argument i tako dobiti manje trivijalne rezultate. Pretpostavimo sada da dva igrača bacaju strelice na $I$, pri čemu su njihova bacanja potpuno nezavisna. Unapred možemo reći da je verovatnoća da će prvi igrač pogoditi neki iracionalan broj 1. Ovde se oslanjamo isključivo na činjenicu da je skup svih racionalnih brojeva prebrojiv. Ukoliko drugi igrač baca strelicu nakon prvog, kolika je verovatnoća da neće pogoditi neki racionalan umnožak broja koji je pogodio prvi igrač? Kako treba da promaši samo prebrojivo mnogo brojeva određenih bacanjem prvog igrača, odgovor je 1. Pretpostavimo, dakle, da imamo funkciju $f{:}I\longrightarrow I_{\aleph_0}$ (gde je $I_{\aleph_0}$ skup svih prebrojivih podskupova jediničnog intervala $I$) koja za svaki $x\in I$ kao argument daje neki prebrojiv podskup skupa $I$ kao vrednost $f(x)$. Ukoliko je, primera radi, prvi igrač pogodio neki broj $x\in I$, verovatnoća da će drugi igrač pogoditi neki broj iz $I \setminus f(x)$ jednaka je 1. Međutim, kako su bacanja naših igrača nezavisna situacija je simetrična, tako da možemo reći da, ukoliko je drugi igrač pogodio neki broj $y\in I$, verovatnoća da će broj koji je pogodio prvi igrač biti u $I \setminus f(y)$ takođe je ravna jedinici. Po Frilingovim rečima, kontinuum „ne zna koja je od dve strelice prva bačena."[18]

Sada smo spremni da formulišemo Frilingovu aksiomu:

$$\mathbf{A}_{\aleph_0} \qquad \forall f{:}I\longrightarrow I_{\aleph_0}\exists x\exists y(x\notin f(y)\wedge y\notin f(x))$$

U teoriji *ZFC* ova aksioma je, kako je to Friling pokazao, ekvivalentna sa $\neg CH$. Po njegovom mišljenju, pomenuto tvrđenje kao i intuicija koje iza njega stoji predstavlja „jednostavan filozofski 'dokaz' negacije Kantorove hipoteze kontinuuma."[19]

Dakle, pitanje je da li prihvatamo $A_{\aleph_0}$ kao aksiomu koji odlučuje *CH*? Da li su intuicije koje stoje u pozadini ove aksiome dovoljno jake da bismo je mogli prihvatiti bez sumnje? Drugim rečima, u kojoj meri Frilingov argument zaista predstavlja filozofski dokaz $\neg CH$, ukoliko pod terminom „filozofski dokaz" podrazumevamo razložan i postojan argument u prilog izvesnom tvrđenju?

Pre nego što pružimo odgovor na ovo pitanje, razmotrićemo jedan problem koji sa njim stoji u tesnoj vezi. Dobro je poznato da je aksioma izbora (u nastavku *AC*) imala prilično kontroverznu istoriju. Počevši od prvih implicitnih upotreba sve do Cermelove (Ernst Zermelo) eksplicitne formulacije ove aksiome, koju i danas koristimo, pa i u godinama nakon toga, *AC* je uvek pobuđivala sumnju kod one grupe matematičara koje bismo mogli nazvati konstruktivistima, u širem smislu te reči.

Sama aksioma tvrdi postojanje funkcije izbora[20] a da pritom ne pruža nikakav postupak kojim bismo pomenutu funkciju mogli konstruisati. U slučaju konačnih

18 Freiling, C. *op. cit.* p. 192.

19 Freiling, C. *op. cit.* p. 190.

20 *Funkcija izbora f* je funkcija definisana na familiji nepraznih skupova $X$, tako da za svako $S\in X$ važi $f(S)\in S$.

skupova to, naravno, ne predstavlja problem. Međutim, kada je reč o beskonačnim skupovima aksioma iziskuje beskonačno mnogo proizvoljnih izbora, što je bio trn u oku konstruktivista. Njihova nastojanja da diskredituju *AC* kao legitiman deo matematičke prakse dobila su potporu u čuvenim rezultatima Banaha (Stefan Banach) i Tarskog (Alfred Tarski). Naime, oni su dokazali da *AC* ima za posledicu postojanje dekompozicije površine jedinične lopte na konačno mnogo delova od kojih se mogu, kretanjem u prostoru, složiti dve lopte iste veličine. Ovaj rezultat se često naziva i *paradoksom Banaha i Tarskog* iz očiglednih razloga. Krajnje je protivno intuiciji da, počevši od jedne lopte, njenim isecanjem na konačno mnogo delova i kasnijim slepljivanjem istih možemo dobiti dve takve lopte. Da li ovaj rezultat predstavlja nesumnjivo pobijanje aksiome izbora?

Ukoliko bi geometrijska jedinična lopta bila ne više od fizičkih lopti našeg svakodnevnog iskustva, to bi verovatno bio slučaj. Međutim, stvari stoje nešto drugačije. Na prvom mestu, delovi jedinične lopte dobijeni dekompozicijom su *nemerljivi skupovi*. Ukoliko bi skupovi o kojima je reč bili merljivi, a znamo da izometrijska kretanja u prostoru čuvaju površinu, rezultat ne sledi, jer bi bio u suprotnosti sa aditivnošću mere. Da bismo sa pravom mogli zaključiti da je *AC* netačna, bio bi nam neophodan nezavisan argument koji bi tvrdio nemogućnost dekompozicije navedene u tvrđenju a koji se pritom ne bi oslanjao na pojam površine. Teško je zamisliti kako bi jedan takav argument izgledao. Ono što možemo da zaključimo jeste da naše intuicije nisu uvek konačno merilo istinitosti nekog matematičkog tvrđenja.

Vratimo se sada našem centralnom problemu. Koliko je razložan Frilingov argument u prilog negaciji hipoteze kontinuuma? Razmotrimo za početak sledeće tvrđenje Šerpinjskog (Wacław Sierpiński): hipoteza kontinuuma važi ako i samo ako postoji particija skupa $I^2$ (gde je $I^2$ jedinični kvadrat $[0,1]\times[0,1]$ u euklidskoj ravni) na dva skupa $A_1$ i $A_2$ takva da važi sledeće:[21]

1. svaki *horizontalni presek* skupa $I^2$ sadrži samo prebrojivo mnogo tačaka iz $A_1$;
2. svaki *vertikalni presek* skupa $I^2$ sadrži samo prebrojivo mnogo tačaka iz $A_2$.

Sada, pretpostavimo da smo tačke iz skupa $I^2$ obojili dvema bojama, recimo zelenom i žutom, na takav način da ukoliko posmatramo proizvoljan horizontalni presek ovog skupa, sve sem prebrojivo mnogo tačaka jesu zelene boje dok, ukoliko posmatramo proizvoljan vertikalni presek, sve sem prebrojivo mnogo tačaka jesu žute boje.[22] Koje je boje skup $I^2$?

21 Skup $S$ je *horizontalni presek* skupa $I^2$ ako i samo ako postoji $r \in I$ takav da je $S = \{(x,y) \in I^2 \mid x = r\}$. Slično tome, skup $S$ je *vertikalni presek* skupa $I^2$ ako i samo ako postoji $r \in I$ takav da je $S = \{(x,y) \in I^2 \mid y = r\}$.

22 Ovaj primer dugujemo Alazderu Erkartu (Alasdair Urquhart).

Ukoliko se na neki čudan način fokusiramo na vertikalne a zanemarimo horizontalne preseke, on će biti žute boje. Ako, pak, posmatramo horizontalne dok zanemarujemo vertikalne preseke, stvar je obrnuta. Mogli bismo reći da je skup $I^2$, u celini, u isto vreme i zelene i žute boje. Ovo zvuči prilično paradoksalno. Možemo li iz ovoga zaključiti da, budući da je tvrđenje koje nam omogućava particiju skupa $I^2$ na skupove $A_1$ i $A_2$, koje smo naknadno obojili, ekvivalentno sa *CH*, iz toga sledi da $\neg CH$?

Čini se da je problem sa takvim gledištem sličan onom koji smo razmatrali u vezi teoreme Banaha i Tarskog. Naime, problem se javlja u onom trenutku kada naše intuicije u pogledu fizičkih objekata na identičan način primenimo na matematičke objekte. Kao što u teoremi Banaha i Tarskog nije bilo reči o odrescima neke fizičke lopte već o delovima jedinične geometrijske lopte koji su, šta više, nemerljivi skupovi, tako i u našem primeru nije reč o kuglicama koje smo navikli da bojimo u svakodnevnom životu već o $2^{\aleph_0}$ tačaka skupa $I^2$ i skupovima istih, koji sa svojim svojstvima ne moraju uvek odgovarati našim intuicijama.

Slično važi i za Frilingov primer. Naime, kao što particija skupa $I^2$ na skupove $A_1$ i $A_2$ nema za naš primer relevantne veze sa bojenjem predmeta u svakodnevnom smislu tako ni intuicije koje posedujemo u pogledu verovatnoće određenih ishoda postupaka bacanja strelica na metu ne moraju tačno odgovarati strukturi matematičkog kontinuuma. Jer, pod pretpostavkom da *CH* važi, imamo da ukoliko neko $f : I \longrightarrow I_{\aleph_0}$ ne zadovoljava uslove Frilingove aksiome, onda su skupovi $\{(x,y) | y \in f(x)\}$ i $\{(x,y) | x \in f(y)\}$, gde su $x,y \in I$, nemerljivi. Međutim, zašto bismo morali zahtevati da naše intuicije o verovatnoći moraju odgovarati svojstvima nemerljivih skupova? Kao što smo pomenuli ranije, nemerljivi skupovi imaju mnoga svojstva koja izgledaju protivna intuiciji. U ovo smo se uverili kada smo razmatrali teoremu Banaha i Tarskog. Frilingova implicitna pretpostavka u „misaonom eksperimentu" bacanja strelica jeste da su skupovi funkcija $f : I \longrightarrow I_{\aleph_0}$ iz aksiome $A_0$ merljivi. Međutim, ovo ne mora nužno biti slučaj. Da li se moramo odreći aksiome izbora jer nam dopušta konstrukciju nemerljivih skupova, onih čije postojanje tvrdi teorema Banaha i Tarskog ili Vitalijeva (Giuseppe Vitali) konstrukcija nemerljivog skupa realnih brojeva, primera radi?

## III

Čini nam se da na osnovu prethodno rečenog možemo da zaključimo da je Braunovo tvrđenje „da postoji samo jedno plauzibilno objašnjenje kako Frilingov argument radi: negde usput, platonistička intuicija je bila na delu"[23] naprosto pogrešno. Za početak, Frilingov argument *ne radi*, „matematička greška u prelazu

23 Brown, J. R. *op. cit.* p. 158.

sa misaonog ekperimenta na $A_{\aleph_0}$ počiva na neopreznom uopštenju plauzibilne intuicije o merljivim podskupovima od $I$ na proizvoljne podskupove od $I$."[24]

Međutim, pretpostavimo za trenutak da Frilingov argument radi, te da je platonistička intuicija zaista na delu i da nam omogućava da se uverimo da je *CH* lažna. Prisetimo se da argument počiva na činjenici da je prebrojiv podskup skupa $I$ manje kardinalnosti od $I$ te da je gotovo sigurno da će slučajna strelica pogoditi njegov komplement. Ukoliko je ovo slučaj, prebrojiv podskup skupa $I$ možemo zameniti ma kojim podskupom od $I$ kardinalnosti $< 2^{\aleph_0}$ i time dobiti sledeću varijantu Frilingove aksiome:

$$A_{<c} \qquad \forall f{:}I \longrightarrow I_{<c} \exists x \exists y (x \notin f(y) \wedge y \notin f(x))$$

gde je $I_{<c}$ skup svih podskupova od $I$ kardinalnosti $< 2^{\aleph_0}$.

Čini nam se da aksioma $A_{<c}$ nije ništa manje opravdana od aksiome $A_{\aleph_0}$. Naime, ukoliko ima smisla pripisivanje verovatnoće proizvoljnim podskupovima od $I$, onda zaista možemo tvrditi da će slučajna strelica gotovo sigurno promašiti neki unapred dati podskup od $I$ kardinalnosti $< 2^{\aleph_0}$. Međutim, imamo da $ZF + A_{<c} \Rightarrow \neg AC$. Konkretno, aksioma $A_{<c}$ zajedno sa aksiomama teorije *ZF* povlači da ne postoji dobro uređenje skupa $I$. O aksiomi izbora Braun kaže sledeće:

> „Cermelo ju je formulisao [aksiomu izbora *prim. prev.*] pre jednog veka da bi dokazao teoremu o dobrom uređenju. Mnogi su prigovarali njenoj upotrebi ali tokom vremena ova aksioma [...] je postala standardno oruđe u matematici. Šta je tačno ubedilo širu matematičku zajednicu u ispravnost ove aksiome? Dve stvari. Na prvom mestu, ona predstavlja beskonačnu verziju deduktivnog principa koji je opšte prihvaćen u konačnom slučaju. Dakle, ona je podržana putem analogije. Na drugom mestu, ona za posledicu ima rezultate koji se obično smatraju plauzubilnim po sebi i koji se ne mogu dedukovati bez ove aksiome. Ovaj drugi razlog za prihvatanje ove aksiome je sličan načinu zaključivanja koji se često javlja u nauci: ako izvesna hipoteza ima za posledicu širok spektar prihvaćenih rezultata koji se ne mogu dedukovati ni na koji drugi razložan način, onda bi ovo trebalo da smatramo svedočanstvom o istinitosti pomenute hipoteze. Gedel je, primera radi, jako zastupao ovaj način razmišljanja. Kako Gedelova podrška sugeriše, on je u skladu sa platonizmom. "[25]

Međutim, ukoliko je *AC* opravdana sa platonističkog stanovišta koje Braun zastupa, kako možemo pomiriti njegovo tvrđenje da matematička intuicija stoji iza Frilingovog argumenta za $\neg CH$ ukoliko ista ta intuicija takođe podržava komplementaran argument za $\neg AC$ koji smo gore naveli?

24 Hauser, K. *op. cit.* p. 111.

25 Brown, J. R *op. cit.* p. 55.

Pretpostavljamo da je matematička intuicija konzistentna, pa ne bi trebalo da je slučaj da nam ona omogućava da dokažemo međusobno protivrečna tvrđenja. Rešenje se možda ogleda u tome što je, kako Braun kaže, matematička intuicija pogrešiva pa naprosto nismo u stanju da tvrdimo $\neg AC$ jer nas u tom slučaju ona zavarava. Nije, nažalost, nimalo jasno u kom suštinskom smislu se razlikuju Frilingovi argumenti za $\neg CH$ s jedne i $\neg AC$ s druge strane. Braun nam duguje ovo objašnjenje ukoliko želi da zadrži *AC* i da, u isto vreme, tvrdi da matematička intuicija stoji iza Frilingovog argumenta.

Ovome u prilog govori i činjenica da su nakon pojavljivanja Frilingovog rada njegovi argumenti interpretirani tako kao da su usmereni protiv *AC* pre nego protiv *CH*.[26] Ilustrujmo ovo sledećim primerom. Neka je *wCH* tvrđenje: *svaki neprebrojiv podskup skupa* $\mathbb{R}$ *se može dovesti u bijekciju sa* $\mathbb{R}$. U *ZFC* imamo da $CH \Leftrightarrow wCH$, međutim u odsustvu aksiome izbora ova dva tvrđenja nisu ekvivalentna. Neka je *LM* tvrđenje: *svaki podskup skupa* $\mathbb{R}$ *je Lebeg-merljiv*. Početkom sedamdesetih godina prošlog veka, Solovej (Robert Solovay) je konstruisao model *ZF* teorije skupova $\mathcal{M}$ takav da u njemu važi:

1. *LM*;
2. Svaki podskup skupa $\mathbb{R}$ ima svojstvo savršenog skupa.[27]

U ovom modelu važi *wCH*, budući da je svaki podskup od $\mathbb{R}$ prebrojiv ili kardinalnosti $2^{\aleph_0}$ na osnovu (2). Takođe, (1) ima za posledicu da $A_{\aleph_0}$ važi u M.[28] Kada saberemo sve što je prethodno rečeno imamo da:

$$\mathcal{M} \models ZF + LM + A_{\aleph_0} + wCH$$

Drugim rečima, u odsustvu (pune) aksiome izbora, *wCH* zajedno sa Frilingovom aksiomom je konzistentna sa *ZF*. Dakle, vinovnika kolizije između naših plauzibilnih intuicija o verovatnoći i strukture kontinuuma treba tražiti u aksiomi izbora. Tumačiti ovu koliziju kao „jasan filozofski dokaz” negacije hipoteze kontinuuma naprosto je neodrživo.

Jedna istorijska napomena je na mestu. Braun tvrdi da bi „Gedel podržao Frilingov pristup problemu *CH* ako ne do detalja ono bar u načelu.”[29] Čini nam se da ovo teško može biti tačno budući da u svom čuvenom radu o Kantorovom problemu kontinuuma Gedel eksplicitno navodi tvrđenje Šerpinskog (čija je $\neg A_{\aleph_0}$

26 Maddy, P. „Believing the axioms. I“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, no. 2, 1988, p. 500.

27 Podskup skupa $\mathbb{R}$ ima *svojstvo savršenog skupa* ako je prebrojiv ili ima neprazan savršen podskup. Kako su savršeni podskupovi od $\mathbb{R}$ uvek kardinalnosti kontinuuma, oni ne mogu predstavljati kontraprimer hipotezi kontinuuma.

28 Weitkamp, G. „The $\sum_2^1$ theory of axioms of symmetry“, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 54, no. 3, 1989, p. 732.

29 Brown, J. R *op. cit.* p. 97.

jednostavna posledica) koje smo spomenuli gore. Istina, kao jednu od neintuitivnih posledica *CH*, ali ni u jednom trenutku ne predlažući da njegovu negaciju usvojimo kao aksiomu koja bi *CH* trebalo da odluči.[30] Šta više, u pismu Tarskom, osvrćući se na grešku u svom dokazu $\neg CH$ iz nekih „veoma plauzibilnih aksioma”, Gedel kaže: „Moje uverenje da je $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ je naravno donekle poljuljano. Ali ovo mi se i dalje čini plauzibilnim. Jedan od glavnih razloga jeste i taj što ne verujem ni u kakvu vrstu iracionalnosti kao što su, primera radi, slučajni nizovi u apsolutnom smislu.”[31]

## IV

Kako smo već napomenuli, Braunova studija donosi mnogo toga novog filozofskoj literaturi o matematičkom platonizmu i njegovim suparnicima. U ovom pogledu ona igra važnu ulogu pomažući nam da sagledamo probleme sa kojima se svaka pozicija u filozofiji matematike koja pretenduje na koherentnost suočava. Nema sumnje da je stanovište sa koga Braun nastupa polemičko. Njegovi originalni argumenti su formulisani veoma smelo i može se reći da su u tom pogledu izuzetak u odnosu na veliki broj studija koje nam nude beskrajnu rekapitulaciju starih ideja sa malo ili nimalo novog.

Smelost, međutim, ima svoju cenu, posebno ukoliko nije podržana solidnijim poznavanjem sadržaja o kome se diskutuje. Braun s pravom ističe teoriju skupova i pitanje novih aksioma kao jedno od centralnih borilišta između platonizma i njemu suprotstavljenih pozicija. Sfera „viših beskonačnosti” takođe je oblast u kojoj se platonizam najsigurnije kreće i u kojoj uživa najveću podršku u poređenju sa ostalim granama matematike.

Nažalost, Braunovi originalni argumenti u kontekstu teorije skupova su, kako smo videli, manjkavi. Izgleda da Medijeva bolje vlada teorijom skupova od Brauna, koji nije bio u stanju da formuliše argumente u prilog platonizma koji bi se na najsnažniji način suprotstavili naturalizmu. Primera radi, navodeći heurističko pravilo *maksimizacije*, koje rukovodi skupovno-teorijskom praksom i za koje Medijeva kaže da

> „ukoliko matematika treba da se slobodno razvija [...] i ukoliko teorija skupova treba da igra ulogu u zasnivanju matematike kojoj se nadamo, onda teorija skupova ne sme nametati nikakva sebi svojstvena ograničenja: sku-

30 Gödel, K. *Collected Works*, *Volume II*, *Publications 1938-1974*, ed. by Feferman S., Dawson J., Kleene S., Moore G., Solovay R., van Heijenoort J., Oxford University Press, 1990, p. 186.

31 Gödel, K. *Collected Works*, *Volume III*, *Unpublished essays and lectures*, ed. by Feferman S., Dawson J., Goldfarb W., Parsons C., Solovay R., Oxford University Press, 1995, p. 424.

povno teorijska arena u kojoj bi matematika trebalo da se modeluje trebalo bi da bude što izdašnija."[32]

Braun tvrdi da „zahtev za maksimizacijom proističe iz želje za zasnivanjem drugih teorija.[...] Teorija skupova se ne opravdava sopstvenim sredstvima već pre potrebama drugih teorija (doduše drugih matematičkih teorija)."[33]

Ogroman deo moderne matematike može se formalizovati unutar *ZFC*. Ovde ne spada teorija kategorija, ali su za formalizaciju ove matematičke discipline dovoljna proširenja teorije *ZFC* takozvanim (malim) velikim kardinalima. Ova proširenja predstavljaju tek početak rastućeg niza sve snažnijih teorija koje postuliraju postojanje velikih kardinala. Nesuvislo je tvrditi da su ova proširenja formulisana sa ciljem zasnivanja drugih matematičkih teorija. Ona su na prvom mestu formulisana zbog toga da bi se potražili odgovori na pitanja na koja *ZFC* nije mogla da odgovori, pitanja kao što je *CH*.

Šezdesetih godina prošlog veka, nedugo nakon Koenovog dokaza nezavisnosti *CH*, postalo je jasno da čak ni najjača proširenja teorije *ZFC* ne mogu dati odgovor na ovo pitanje. U tom periodu, modeli teorije skupova kao i odnosi konzistentske snage između različitih proširenja teorije *ZFC* zauzimaju centralno mesto u skupovno-teorijskoj zajednici. Malo toga se promenilo do danas. Proširenja teorije skupova čiji smo svedoci bili u poslednjih pola veka svoj su izvor imala u samoj teoriji skupova i ona su pravdana (ukoliko ih je uopšte bilo potrebno pravdati) željom za daljim razvojem ove discipline.

Platonizam je stanovište koje vredi braniti. On odgovara onome što veliki broj matematičara prećutno podrazumeva kada se bavi matematikom. Takođe, rezultati savremene teorije skupova ga u izvesnom smislu preporučuju u odnosu na njemu suprotstavljene pozicije. Platonizam, kako smo videli, ima i ozbiljne epistemološke probleme sa kojima se suočava. Braunova studija nas, nažalost, ne čini značajno bližim njihovom rešenju.

Miloš Adžić
Filozofski fakultet Univerziteta u Beogradu

32 Maddy, P. *Naturalism in Mathematics*, p. 210.

33 Brown, J. R. *op. cit.* p. 154.

Miloš Adžić

**On Pitfals of Naturalism**

(Summary)

This paper examines some arguments directed against naturalism in the philosophy of mathematics. These arguments are formulated from the platonistic standpoint with the intention to show that we can coherently describe the faculty of mathematical intuition, which is unacceptable to every kind of naturalism.

KEY WORDS: platonism, naturalism, mathematical intuition, Freiling's argument.